Věta o linearizované nestabilitě

Ondřej Kincl

Věta. *Nechť f je funkce třídy $C^1(U(x_0))$, kde $U(x_0)$ je okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x_0) = 0$. Dále nechť existuje $\lambda \in \sigma(\nabla f(x_0))$ takové, že $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Pak x_0 je nestabilní řešení rovnice $x' = f(x)$.*

Důkaz. BÚNO nechť $x_0 = 0$. Označme $A = \nabla f(0)$. Naši rovnici můžeme pak psát ve tvaru:

$$x' = Ax + g(x), \quad \text{kde} \quad g(x) = o(|x|). \tag{1}$$

Zvolme $\alpha > 0$ tak malé, že $\operatorname{Re}\lambda \geq \alpha$ pro každé $\lambda \in \sigma_+(A)$. Pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\epsilon > 0$ platí:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & & \\ & \lambda & \epsilon & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{matice přechodu:} \quad \begin{pmatrix} \epsilon & & & \\ & \epsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \epsilon^l \end{pmatrix}$$

Existují tedy matice C, D, E takové, že

$$C^{-1}AC = D + E,$$

$$D \text{ je diagonální},\ \sigma(D) = \sigma(A),\ \|E\| \leq \frac{\alpha}{8}.$$

Substitucí $y = Cx$ v (1) dostaneme rovnici:

$$\begin{aligned} Cy' &= ACy + g(Cy) \\ y' &= Dy + \underbrace{Ey + C^{-1}g(Cy)}_{h(y)} \\ y' &= Dy + h(y). \end{aligned} \tag{2}$$

Zobrazení maticí C je homeomorfismus, stačí tedy dokázat nestabilitu y v blízkosti nuly. Zvolme nyní $\Delta > 0$ tak malé, že f je C^1 na $\overline{U}(0, \Delta)$ a

$$|g(x)| \leq \frac{\alpha}{8\|C\|\|C^{-1}\|}|x|, \quad \forall x \in \overline{U}(0, \Delta).$$

Pak dostaneme, že

$$|h(y)| \leq \frac{\alpha}{4}|y|, \quad \forall y \in \overline{U}(0, \Delta).$$

Každé $y \in \mathbb{R}^n$ lze rozložit na $y = y_1 + y_2$, kde y_1 je ortogonální projekce do prostoru $M_+(D)$ a y_2 je ortogonální projekce do prostoru $M_-(D) \oplus M_0(D)$. Rozepsáním do složek lze snadno nahlédnout, že pro všechna $y \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$\operatorname{Re}\langle Dy_1, y_1 \rangle \geq \alpha |y_1|^2,$$

$$\mathrm{Re}\,\langle Dy_2, y_2\rangle \leq 0.$$

Definujme "kužel nestability":

$$K = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_1|^2 > |y_2|^2\}$$

S důkazem budeme hotovi, ukážeme-li, že každé maximální řešení (y, I) rovnice (2) s počáteční podmínkou $y(0) \in K \cap U(0, \Delta)$ opustí v konečném čase $\overline{U}(0, \Delta)$. Pro spor předpokládejme, že $y(t) \in \overline{U}(0, \Delta)$ pro každé $t \in I, t \geq 0$. Pak z věty o opuštění kompaktu je y definováno na $[0, +\infty)$. Funkce y, h rozložme na složky y_1, y_2, h_1, h_2 jako výše. Pro každé $t \in I$ takové, že $y(t) \in K$ platí:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|y_1|^2 = \langle y_1', y_1\rangle + \langle y_1, y_1'\rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle y_1', y_1\rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle Dy_1, y_1\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle h_1(y), y_1\rangle \geq$$

$$\geq 2\alpha|y_1|^2 - 2|h(y)||y_1| \geq 2\alpha|y_1|^2 - \frac{\alpha}{2}|y||y_1| \geq 2\alpha|y_1|^2 - \alpha|y_1|^2 = \alpha|y_1|^2.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|y_2|^2 = 2\,\mathrm{Re}\langle Dy_2, y_2\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle h_2(y), y_2\rangle \leq 2|h(y)||y_2| \leq \frac{\alpha}{2}|y||y_2| \leq \alpha|y|^2.$$

Řešení y nemůže opustit kužel K – kdyby ano, existovalo by nejmenší $\tau > 0$ takové ,že $|y_1(\tau)|^2 - |y_2(\tau)|^2 = 0$. Z nerovností výše pak ale plyne, že $|y_1(t)|^2 - |y_2(t)|^2$ je neklesající na $(0, \tau)$, což je spor. Platí tedy $y(t) \in K \cap \overline{U}(0, \Delta)$ pro všechna $t \geq 0$. Pak ale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|y_1|^2 \geq \alpha|y_1|^2 > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Speciálně je $|y_1|^2$ rostoucí funkce, jejíž derivace je vždy alespoň $\alpha|y_1(0)|^2$. Pak $|y_1| \to \infty$, pro $t \to \infty$, a to je také spor. $\square$