(A1) Je dána soustava rovnic (pro neznámé funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$)

$$\begin{aligned} x' &= x(1 - x/2 - y) \\ y' &= y(2 - 2x - y) \end{aligned}$$

Pomocí elementárních úvah vyšetřete chování řešení
(i) na poloosách $\{y = 0, x \geq 0\}$, $\{x = 0, y \geq 0\}$
(ii) v prvním kvadrantu $\{x > 0, y > 0\}$
Načrtněte obrázek průběhu typických řešení (alespoň 10 x 10 cm).

(A2) Nechť $\varphi(t, a, b)$ je řešicí funkce rovnice

$$x' = \exp(b/x), \quad x(0) = a$$

Napište rovnice ve variacích pro $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial a}(t, a, b)$, $v(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial b}(t, a, b)$
(i) obecně
(ii) konkrétně pro případ $b = 0$, $a \neq 0$ libovolné (rovnice není nutno řešit)
(iii) *nepovinné:* totéž pro $z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b}(t, a, b)$

(B1) Je dána soustava rovnic (pro neznámé funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$)

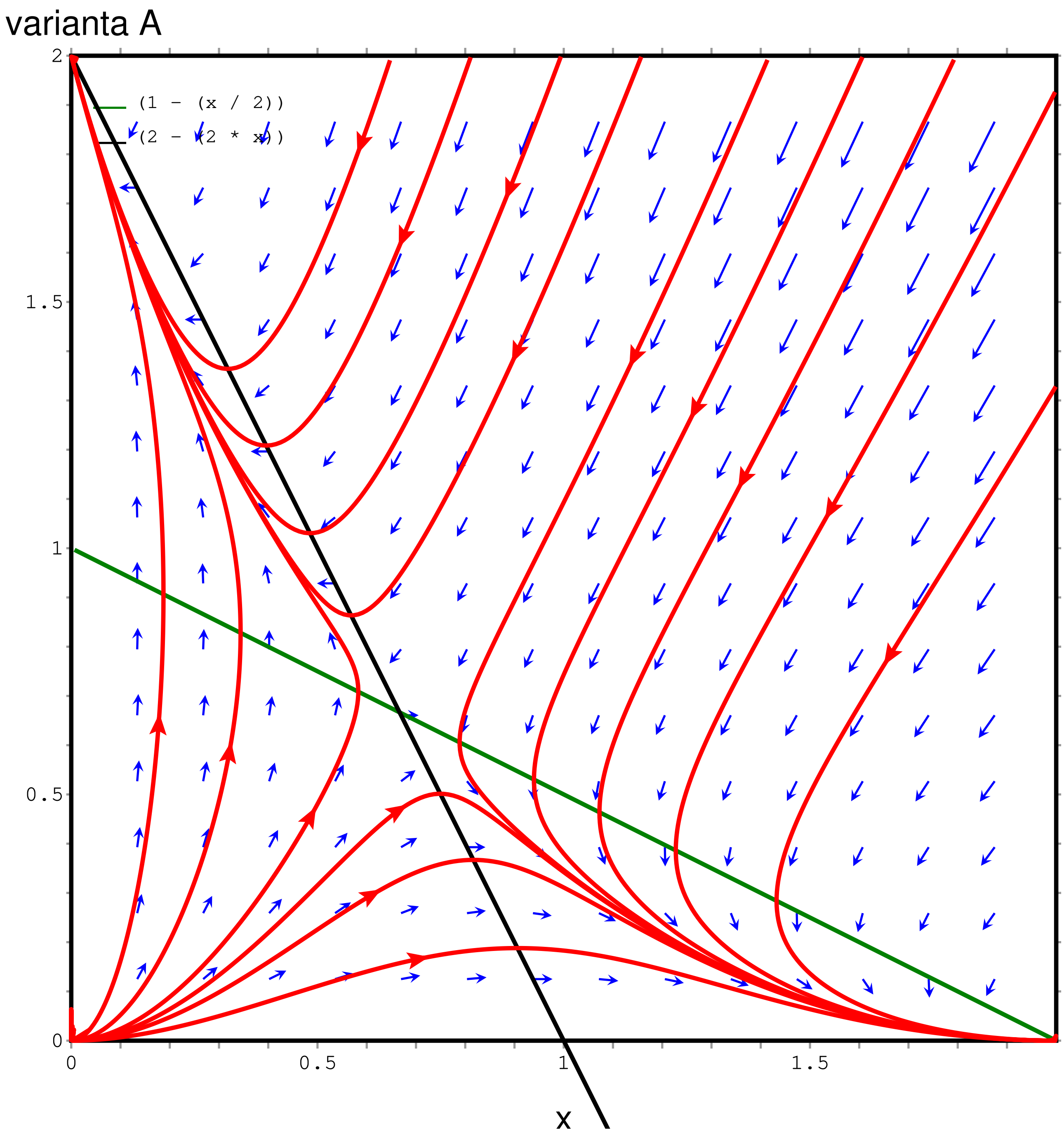
$$\begin{aligned} x' &= x(2 - 2x - y) \\ y' &= y(1 - x/2 - y) \end{aligned}$$

Pomocí elementárních úvah vyšetřete chování řešení
(i) na poloosách $\{y = 0, x \geq 0\}$, $\{x = 0, y \geq 0\}$
(ii) v prvním kvadrantu $\{x > 0, y > 0\}$
Načrtněte obrázek průběhu typických řešení (alespoň 10 x 10 cm).

(B2) Nechť $\varphi(t, a, b)$ je řešicí funkce rovnice

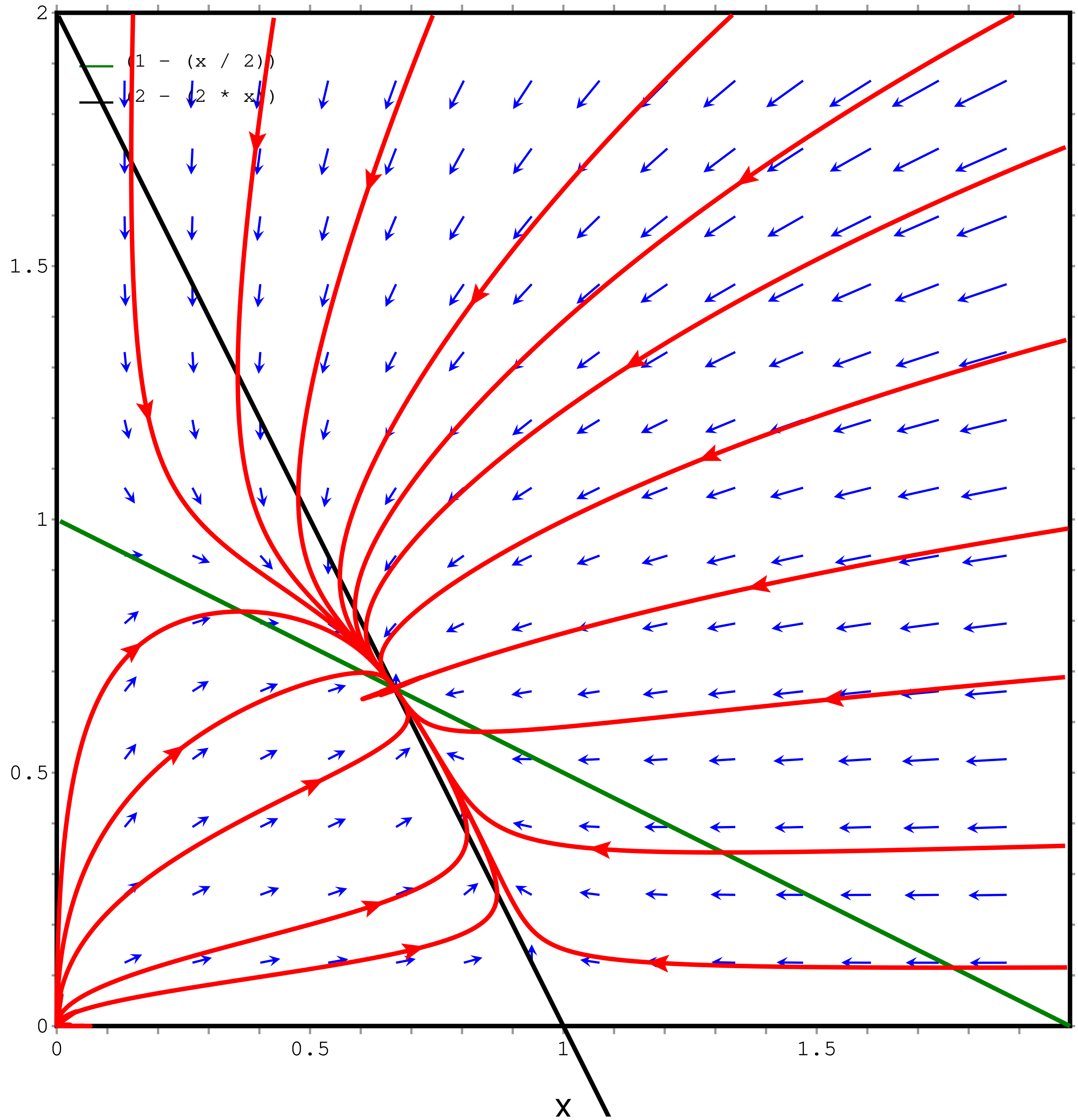
$$x' = \cos(bx), \quad x(0) = a$$

Napište rovnice ve variacích pro $u(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial a}(t, a, b)$, $v(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial b}(t, a, b)$
(i) obecně
(ii) konkrétně pro případ $b = 0$, a libovolné (rovnice není nutno řešit)
(iii) *nepovinné:* totéž pro $z = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b}(t, a, b)$



varianta A
(1 - (x / 2))
(2 - (2 * x))
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
x

varianta B



A2) $x' = \exp\left(\frac{b}{x}\right), \quad x(0) = a$

$$u = \frac{\partial}{\partial a} x, \quad v = \frac{\partial}{\partial b} x, \quad R = \frac{\partial}{\partial b} u = \frac{\partial}{\partial a} v$$

$$u' = \exp\left(\frac{b}{x}\right) \cdot \left(\frac{-b}{x^2}\right) u$$

$$u(0) = 1$$

$$v' = \exp\left(\frac{b}{x}\right) \cdot \frac{x - bv}{x^2} \; ; \; v(0) = 0$$

$$R' = \frac{\partial}{\partial b} u' = \exp\left(\frac{b}{x}\right) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{-bu}{x^2} \right\}}_{\frac{1}{x^4} \cdot \left\{ (-u - bR)x^2 + bu \cdot 2xv \right\}} +$$

$$+ \underbrace{\exp\left(\frac{b}{x}\right) \cdot \left(\frac{x - bv}{x^2}\right)}_{\frac{\partial}{\partial b}\left\{\exp\left(\frac{b}{x}\right)\right\}} \left(\frac{-bu}{x^2}\right)$$

B2) $x' = \cos(bx) \; ; \; x(0) = a$

$$u = \frac{\partial}{\partial a} x, \quad v = \frac{\partial}{\partial b} x, \quad R = \frac{\partial}{\partial b} u = \frac{\partial}{\partial a} v$$

$$u' = -\sin(bx) \cdot bu$$

$$u(0) = 1$$

$$v' = -\sin(bx) \cdot (x + bv)$$

$$v(0) = 0$$

$$R' = \frac{\partial}{\partial a} v' = -\sin(bx) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial a} \left\{ x + bv \right\}}_{u + bR} +$$

$$+ \left(-\cos(bx)\right) \cdot bu \cdot (x + bv)$$

$$\frac{1}{x^4}\left(\left(u - bz\right)x^2 - \left(x - bv\right)2xu\right)$$

Kontrola:

$$-ux^2$$

A2) $$z' = \frac{\partial}{\partial a} v' = \exp\left(\frac{b}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{x - bv}{x^2}\right\} +$$

$$+ \exp\left(\frac{b}{x}\right) \cdot \left(\frac{-bu}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{x - bv}{x^2}\right)$$

B2) $$z' = \frac{\partial}{\partial b} u' = -\sin(bx) \cdot (u + bz) +$$

$$-\cos(bx) \cdot (x + bv) \cdot bu$$