Příkl. $F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-|a|x} \sin(ax)\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

je nespojitá v bodě $a=0$, neboť:

$$\boxed{F(a) = \begin{cases} 0, & a=0 \\ \frac{1}{2a}, & a \neq 0 \end{cases}}$$

dk. pomocí vzorečků:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \qquad \forall \alpha>0,\ \beta \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

Věta 18.11. [Spojitá závislost int. na parametru]

dk. 1. konečnost: buď $a \in I$ pevné

(i), (iii) $\Rightarrow$ $f(a,\cdot) \in \mathcal{L}(\Omega)$,

neboli $F(a) \in \mathbb{R}$

viz: poznámka o vlastnostech $\mathcal{L}(\Omega)$, za Větou 18.5.

2: spojitost: díky Heinemu (Věta 7.7)

stačí ukázat: $\boxed{F(a_n) \to F(a_0),\ n \to \infty \text{ kde } a_n, a_0 \in I \text{ jsou libovolné t.ž. } a_n \to a_0.}$

nechť $a_n \in I$, $a_n \to a_0 \in I$ dáno

cíl: $\int_\Omega \underbrace{f(a_n, x)}_{=} dx \to \int_\Omega \underbrace{f(a_0, x)}_{=} dx$

označme: $h_n(x)$ $\qquad$ $h(x)$

zřejmě platí:

- h_n, h měřitelné v Ω ... dle (i)
- $h_n(x) \to h(x)$ pro s.v. $x \in \Omega$

  ... dle (ii) a Heineho věty

- $|h_n(x)| \leq g(x) \in \mathcal{L}(\Omega)$, $\forall n$

  ... dle (iii) $\qquad$ s.v. v Ω

Věta 18.6. (Lebesgue) $\Rightarrow \int_\Omega h_n(x)\,dx \to \int_\Omega h(x)\,dx$

tj. cíl platí.

Příkl ① $F(a) = \int_0^{100} \frac{a^2x^2}{a^4+x^2}\,dx$,

$a \in \mathbb{R}$ je spojité.

dk. Věta 18.11, $f(a,x) = \frac{a^2x^2}{a^4+x^4}$

$I = (-\infty, +\infty)$, $\Omega = (0,100)$

ad (iii) ... víme $\left|\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right| \le 1$,

$\forall\, \alpha,\beta \neq (0,0)$

$\Rightarrow |f(a,x)| \le \frac{1}{2} =: g(x) \in \mathcal{L}(0,100)$.

② $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx$, $s > 0$

... spojité pro $s \in (0,+\infty)$.

ad bod (iii) ... nejmenší majoranta:

$$g(x) = \sup_{s>0} x^{s-1} e^{-x} = \begin{cases} x^{-1} \cdot e^{-x}, & x \in (0,1) \\ +\infty, & x \in (1,+\infty) \end{cases}$$

.... neboť $s \mapsto x^{s-1} = \exp((s-1)\cdot \ln x)$

klesá/roste pro $x<1$ / $x>1$

TRIK: $I = (\alpha, \beta)$, kde $0 < \alpha < \beta < +\infty$

$$g(x) = \sup_{s \in I} x^{s-1} e^{-x} = \begin{cases} x^{\alpha-1} e^{-x}, & x \in (0,1) \\ x^{\beta-1} e^{-x}, & x \in (0,+\infty) \end{cases}$$

$\Rightarrow g \in \mathcal{L}(0,+\infty)$, neboť:

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\,dx}_{P_1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{\beta-1} e^{-x}\,dx}_{P_2}$$

$e^{-x} \leq 1, x > 0 \Rightarrow P_1 \leq \int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\alpha} < +\infty$

$x^{\beta-1} \leq x^n$, $x > 1$, $n \in \mathbb{N}$ velké

$\Rightarrow P_2 \leq \int_1^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx < \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} = n! < +\infty.$

Věta 18.12 [Derivace integrálu podle parametru.]

dk. 1. konečnost: $a \in I$ dáno

$\boxed{\text{TRIK}}$ Lagrangeovy věty:

$$f(a,x) = f(a_0,x) + (a-a_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial a}(\alpha,x)$$

kde $x \in \Omega$ je pevné

$a_0 \in I$ ... z bodu (iv)

α ... mezi a, a_0 (závisí na x)

$$\Rightarrow |f(a,x)| \le |f(a_0,x)| + |a-a_0|\cdot|g(x)|$$

(díky bodu (iii))

a tedy:

$$\int_\Omega |f(a,x)|\,dx \le \underbrace{\int_\Omega |f(a_0,x)|\,dx}_{<+\infty \text{ (bod (iv))}}$$

$$+ |a-a_0|\cdot\underbrace{\int_\Omega |g(x)|\,dx}_{<+\infty \text{ (bod (iii))}}$$

2. derivace: $\boxed{\dfrac{F(a+t)-F(a)}{t} \overset{?}{\longrightarrow} \int_\Omega \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,x)\,dx \quad \text{pro } t\to 0}$

($a \in I$ pevné)

opět díky Heinemu (Věta 7.6)

$t = t_n$, kde $\{t_n\}$ je libovolná posl. s.ž. $t_n \to 0$

$t_n \neq 0, \forall n$

LS: $\dfrac{1}{t_n}\left(F(a+t_n)-F(a)\right)$

$= \dfrac{1}{t_n}\left(\int_\Omega f(a+t_n,x)\,dx - \int_\Omega f(a,x)\,dx\right)$

$= \int_\Omega \underbrace{\dfrac{1}{t_n}\left(f(a+t_n,x)-f(a,x)\right)}_{h_n(x)}\,dx$

vidíme: $h_n(x) \to \dfrac{\partial f}{\partial a}(a,x)$, $n\to\infty$

a, x pevné (opět Heine + definice $\partial/\partial a$)

než tedy užít Věta 18.6. (Lebesgue)

? majoranta: TRIK (Lagrange)

$$f(a+t_n,x)-f(a,x)=t_n\cdot\frac{\partial f}{\partial a}(\alpha,x)$$

kde α je mezi $a, a+t_n$

(závisí na x)

$$\Rightarrow |h_n(x)|=\left|\frac{\partial f}{\partial a}(\alpha,x)\right|\le g(x)$$

kde $g\in\mathcal{L}(M)$ ... dle (iii)

Příkl. $F(a)=\int_0^{+\infty} e^{-bx}\cdot\frac{\sin(ax)}{x}\,dx$,

$b>0$ pevné, $a\in(-\infty,+\infty)$.

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)=e^{-bx}\cos(ax)$$

ad (iii) ... $g(x)=e^{-bx}\in\mathcal{L}(0,+\infty)$

ad (iv) ... $a_0=0$ ... $f(\cdot,0)\equiv 0$

$$\Rightarrow F'(a)=\int_0^{+\infty} e^{-bx}\cos(ax)=\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow F(a) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right) + C$$

kde $C = 0$, neboť $F(0) = 0$.

Příkl. $\frac{\sin x}{x} \notin \mathcal{L}^*(0, +\infty)$, ačkoliv

$$(\mathcal{N})\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \text{ tj.:}$$

$$\frac{\sin x}{x} \in \mathcal{N}(0, \infty)$$

Dk. 1. Ukážeme, že $\int_0^{+\infty} f^+(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f^-(x)\,dx = +\infty$

$$f^+(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ 0, & x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi) \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} f^+(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{c_k}$$

$x < (2k+1)\pi$, $\sin x > 0$ pro $2k\pi < x (2k+1)\pi$,

$$\Rightarrow c_k \geq \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{(2k+1)\pi} = \frac{1}{(2k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

celkem tedy: $c_k \geq \frac{2}{(2k+1)\pi}$;

leč $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} = +\infty$ (srovnáním s $\frac{1}{k}$)

tedy $\int_0^{\infty} f^+(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = +\infty$.

---

2. dle výpočtu výše je pro $b>0$:

$$
\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int_0^{\infty} \underbrace{e^{-bx}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \frac{\sin x}{x}\,dx & = & \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b}\right) \\
\Big\downarrow {*)} & & \Big\downarrow \quad b \to 0+ \\
\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx & = & \frac{\pi}{2}
\end{array}
$$

*) platí, ale ne dle Leviho/Lebesguea, šlo by užít Větu 16.4. (Moore-Osgood)