Poznámka. [Vlastnosti $\mathcal{L}(\Omega)$.]

$f \in \mathcal{L}(\Omega)$ značí: $\exists \int_\Omega f \, d\lambda \in \mathbb{R}$

(„f je integrovatelné, integrál konverguje.")

Platí: (1) $f, g \in \mathcal{L}(\Omega) \Rightarrow \alpha \cdot f, f+g \in \mathcal{L}(\Omega)$

(2) $f \in \mathcal{L}(\Omega) \Leftrightarrow$ f je měřitelné v Ω,

$$\int_\Omega |f| \, d\lambda < +\infty$$

(3) f měřitelné, $|f| \leq g$ s.v. v Ω,

kde $g \in \mathcal{L}(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(\Omega)$.

---

dk. pozorují: je-li f měřitelné, pak

$$f \in \mathcal{L}(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega f^+ d\lambda, \int_\Omega f^- d\lambda < +\infty.$$

odsud snadno plyne (2), neboť

$0 \leq f^+, f^- \leq |f| = f^+ + f^-$, a tedy

$$\int_\Omega |f| \, d\lambda < +\infty \Leftrightarrow \int_\Omega f^+ d\lambda, \int_\Omega f^- d\lambda < +\infty$$

(díky Větě 18.5)

③ je důsledek ②, neboť (V. 18.5)

$$|f| \leq g \text{ s.v.} \Rightarrow \int_\Omega |f| \, d\lambda \leq \int_\Omega g \, d\lambda \in \mathbb{R}$$

① plyne opět z ②, díky Δ-nerovnosti

$$|\alpha \cdot f| = |\alpha| \cdot |f|, \quad |f+g| \leq |f| + |g|$$

<u>Věta 18.6.</u> [Lebesgueova věta.]

Nechť f_n jsou měřitelné, $f_n \to f$ s.v. v Ω. Nechť $\exists g \in \mathcal{L}(\Omega)$ t.ž. $|f_n(x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\int_\Omega f_n \, d\lambda \to \int_\Omega f \, d\lambda, \quad n \to \infty.$$

<u>Dk.</u> ukažme nejprve, že $\boxed{f \in \mathcal{L}(\Omega)}$:

f měřitelné (f_n měřitelné, Věta 18.1)

$|f| \leq g$ s.v. (neboť $f_n \to f$ s.v.),

tudíž $\int_\Omega |f| \, d\lambda < +\infty$

... užijí předchozí poznámky

(podobně vidíme, že také $f_n \in \mathcal{L}(\Omega)$)

plán: pomocné fce h_n & Leviho věta,

kde $h_n(t) = 2g(t) - \sup_{j \geq n} |f_j(t) - f(t)|$

vidíme:

- h_n měřitelné (věta 18.1.)
- $h_n \geq 0$ $\left(|f_j - f| \leq |f_j| + |f| \leq 2g \right)$
- $h_n(t) \leq h_{n+1}(t)$, t pevné:

$$\sup_{j \geq n} (\dots) \geq \underbrace{\sup_{j \geq n+1} (\dots)}_{\substack{\text{menší množina,} \\ \text{supremum menší (nebo =)}}}$$

ukažme dále, že $\boxed{\sup_{j \geq n} |f_j(t) - f(t)| \to 0 \text{ pro } n \to \infty, \ t \text{ pevné}}$

$\varepsilon > 0$ dáno: $\exists n_0$ t.ž. $|f_j(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $\forall j \geq n_0$

(víme: $f_j(t) \to f(t)$ pro $j \to \infty$)

tedy také $\forall n \geq n_0$ $\Big|$ $|f_j(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $\forall j \geq n$

odtud konečně:

$$\sup_{j \geq n} |f_j(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

pro $\forall n \geq n_0$.

---

celkem tedy: $0 \leq h_n \nearrow 2g$, $n \to \infty$

Věta 18.4. (Levi)

$$\underbrace{\int_\Omega h_n \, d\lambda}_{\displaystyle \int_\Omega 2g \, d\lambda - \int_\Omega \sup_{j \geq n} |f_j - f| \, d\lambda} \longrightarrow \int_\Omega 2g \, d\lambda$$

odtud dle VoAL (konečnost $\int_\Omega 2g \, d\lambda$!!)

$$\Rightarrow \int_\Omega \sup_{j \geq n} |f_j - f| \, d\lambda \to 0, \quad n \to \infty.$$

odsud konečně $\int_\Omega f_n\,d\lambda \to \int_\Omega f\,d\lambda$,

pomocí odhadů: $\left|\int_\Omega f_n\,d\lambda - \int_\Omega f\,d\lambda\right| \leq$

$\leq \int_\Omega |f_n - f|\,d\lambda \leq \int_\Omega \sup_{j\geq n} |f_j - f|\,d\lambda.$

Věta 18.7. [Leviho pro řady]

Nechť $f_k \geq 0$, $k\in\mathbb{N}$, měřitelné v Ω.

Potom: $\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_\Omega f_k\,d\lambda\right).$

Dk. položme $h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

V. 18.1 $\Rightarrow$ h_n měřitelné;

navíc: $0 \leq h_n(x) \nearrow h(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

kde $h(x) \in [0,+\infty]$, měřitelná v Ω

Věta 18.4. (Leviho) $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n\,d\lambda = \int_\Omega h\,d\lambda}$

nyní uvažme: $PS = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) d\lambda$

$LS = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) d\lambda}_{= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega f_k\right) d\lambda}$

... Věta 18.5, bod (1i)

$\sum_{k=1}^{\infty}$ $\|$ Def.

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_\Omega f_k \, d\lambda\right)$

Věta 18.8. [Lebesgue pro řady.]

Dk. ... zcela analogicky̌ Větě 18.7.

leč že: $\boxed{\int_\Omega h_n \to \int_\Omega h, \; n\to\infty}$

se odůvodní Větou 18.6. (Lebesgue),

díky předpokladu $|h_n| \le g \; \forall n$

Věta 18.9. Buď $f: M \to \mathbb{R}^*$ měřitelná.

1. Pokud $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ (konečné sj.) pro M_j disjunktní, měřitelné, pak

$$\int_M f\,d\lambda = \int_{M_1} f\,d\lambda + \dots + \int_{M_n} f\,d\lambda,$$

má-li P.S. smysl.

2. Nechť $f \in \mathcal{L}^*(M)$ a $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, pro M_j disjunktní, měřitelné.

Potom: $$\int_M f\,d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} f\,d\lambda.$$

3. Nechť $f \in \mathcal{L}^*(M)$ a $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, kde $M_j \subset M_{j+1}$ měřitelné.

Potom: $$\int_M f\,d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int_{M_j} f\,d\lambda.$$

---

dk. klíčové pozorování:

(K.P.) $\int_B f\,d\lambda = \int_A f \cdot \chi_B\,d\lambda$ pro $\forall B \subset A$, měřitelné ad $\underline{1.}$ BÚNO $n=2$ (obecně indukcí)

$1 = \chi_{M_1} + \chi_{M_2}$ skoro všude v M, a tedy

$f = f \cdot \chi_{M_1} + f \cdot \chi_{M_2} =: f_1 + f_2$

$$\overset{\Longrightarrow}{(V.18.5)} \int_M f \, d\lambda = \int_M f_1 \, d\lambda + \int_M f_2 \, d\lambda$$

$$= \underbrace{\int_M f \cdot \chi_{M_1} \, d\lambda}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle \int_{M_1} f \, d\lambda} + \underbrace{\int_M f \cdot \chi_{M_2} \, d\lambda}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle \int_{M_2} f \, d\lambda}$$

dtto (K.P.)

---

ad $\underline{2.}$ $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ disjunktně

$$\Rightarrow 1 = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{M_j}, \quad f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \quad v\ M$$

kde $f_j = f \cdot \chi_{M_j}$

Tedy: $\int_\Omega f\,d\lambda = \int_\Omega \sum_j f_j\,d\lambda \overset{*)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\int_\Omega f_j\,d\lambda}_{= \int_{\Omega_j} f\,d\lambda}$

*) záměna $\sum$ a $\int$:

- $f \geq 0$ ... Levi (V. 18.7.)
- f obecné ... rozklad $f = f^+ - f^-$, VoAL.

---

ad 3. $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, kde $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$

$\Rightarrow 1 = \lim_{j\to\infty} \chi_{\Omega_j}$, $f = \lim_{j\to\infty} \underbrace{f \cdot \chi_{\Omega_j}}_{f_j}$

Tedy:

$$\int_\Omega f\,d\lambda = \lim_{j\to\infty} \underbrace{\int_\Omega f_j}_{= \int_{\Omega_j} f\,d\lambda} \overset{*)}{=} \int_\Omega f\,d\lambda$$

*) záměna lim a $\int$:

- $f \geq 0$ ... Levi (V. 18.4.)
- f obecné ... rozklad $f = f^+ - f^-$, VoAL

Věta 18.10. [Výpočet L.i. v R].

Nechť $f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$ je spojitá. Nechť buď 1. $f(x)\geq 0$ v (a,b)

nebo 2. $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$.

Potom: $$(\mathcal{L})\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b ,$$

kde F je (libovolná) P. fce f v (a,b).

Dk. výpočet PS: lze vzít libovolnou prim. fci; berme:

$$F(x) := (\mathcal{L})\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt , \quad x\in(a,b).$$

(kde $x_0\in(a,b)$ je pevné, libovolné)

má smysl: f měřitelná, omezená na $[x_0,x]$ ($\Leftarrow$ díky spojitosti)

$\Rightarrow f\in\mathcal{L}((x_0,x))$

<u>zlatí</u>: $F'(x) = f(x)$, pro $\forall x \in (a,b)$.

tj. $\frac{d}{dx} (\mathcal{L}) \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(x)$

<u>dk.</u> stejný jako pro R.-i. (Věta 9.6.)

---

máme sedy: $(\mathcal{L}) \int_y^x f(t)\,dt = F(x) - F(y)$,

pro $\forall x, y \in (a,b)$.

zbývá limitní přechod $x \to b-$

$y \to a+$

$\boxed{\text{BÚNO:}}$ $x \to b-$, y ... pevné

stačí pro LS (rovnost limit!)

$x = x_n$ .. (Heineho věta)

mějme $\{x_n\}$ neklesající ...

tj. cíl je: $\boxed{\int_y^{x_n} f\,d\lambda_1 \to \int_y^{b} f\,d\lambda_1, \quad \text{pro } x_n \to b,\ y \text{ pevné}}$

TRIK: $\displaystyle\int_y^{x_n} f \, d\lambda_1 = \int_y^{b} \underbrace{f \cdot \chi_{(y,x_n)}}_{= f_n} \, d\lambda_1$

kde $y < x_n < b$

ač jiné: $x_n \nearrow b \Rightarrow \chi_{(y,x_n)} \nearrow 1$,

a tedy $f_n \to f$ v (y,b)

cíl: $\boxed{\displaystyle\int_y^b f_n \, d\lambda_1 \xrightarrow{?} \int_y^b f \, d\lambda_1}$

nyní dle případů:

1. $f \geq 0$ ... $f_n \nearrow f$, Leviho věta

2. $|f| \in \mathcal{L}$ ... $f = f^+ - f^-$, $f_n = f_n^+ - f_n^-$

kde $f_n^\pm \nearrow f^\pm$, $n \to \infty$

$$\int_y^b f_n = \int_y^b f_n^+ - \int_y^b f_n^- \longrightarrow \int_y^b f^+ - \int_y^b f^-$$

... 2x Levi + VoAL (PS $\in \mathbb{R} \Rightarrow$ má smysl)