Lemma 17.2. Nechť $Q, Q_j, j \in \mathbb{N}$ jsou intervaly v $\mathbb{R}^n$, nechť $Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$.

Pak $\ell(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j)$.

Dk. ?? $\sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j) < \ell(Q)$

BÚNO 1: Q_j otevřené (zvětším), Q omezený, uzavřený (zmenším)

2: stačí $j = 1, \dots n$, $n \in \mathbb{N}$ (díky L. 17.1, neboť Q je kompaktní)

3.: $Q = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j$

4.: protáhnu všechny řezy, vyhodím duplicity: SPOR

Věta 17.3 [Carathéodory].

$\mathcal{M}$ je σ-algebra, $\lambda^*|\mathcal{M}$ je míra.

Dk. 1. $\boxed{\emptyset \in \mathcal{M}}$

$$\underbrace{\lambda^*(T) \overset{?}{=} \lambda^*(\underbrace{T \cap \emptyset}_{\emptyset})}_{=0} + \lambda^*(\underbrace{T \setminus \emptyset}_{T}),$$

pro $\forall T$

$\boxed{A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{M}}$ ihned se uvidí:

$$T \cap A^c = T \setminus A$$

$$T \setminus A^c = T \cap (A^c)^c = T \cap A$$

$\boxed{\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}}$ ... analogicky

2. $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$, tj: $\boxed{\text{cíl:}}$

$$\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap (A \cap B)) + \lambda^*(T \cap (A \cap B)^c)$$

pro $\forall T \subset \mathbb{R}^n$

víme: $A \in \mathfrak{M}$, testuji T

$$\boxed{\lambda^*(T) = \lambda^*(T\cap A) + \lambda^*(T\cap A^c)}$$

dále: $B \in \mathfrak{M}$, testuji $T\cap A$

$$\boxed{\lambda^*(T\cap A) = \lambda^*((T\cap A)\cap B) + \lambda^*((T\cap A)\cap B^c)}$$

konečně: $A \in \mathfrak{M}$, testuji $T\cap (A\cap B)^c$

$$\lambda^*(T\cap (A\cap B)^c) = \lambda^*(A\cap T\cap (A\cap B)^c) + \lambda^*(A^c\cap T\cap (A\cap B)^c)$$

uvažme, že:

$$A\cap T\cap (A\cap B)^c = A\cap T\cap B^c$$

$$A^c\cap T\cap (A\cap B)^c = A^c\cap T,$$

neboť $A^c\cap (A\cap B)^c = A^c$, $\forall B$.

a tedy:

$$\boxed{\lambda^*(T\cap (A\cap B)^c) = \lambda^*(A\cap T\cap B^c) + \lambda^*(A^c\cap T)}$$

... kombinací s $\square$ plyne $\boxed{\text{cíl}}$

odsud dále: $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$

neboť $A \cup B = ((A \cup B)^c)^c = (A^c \cap B^c)^c$

celkem: $\mathcal{M}$ je algebra, tj. uzavřené na konečné operace $\cup, \cap, {}^c$.

---

3. adivitita: $A, B \in \mathcal{M}$ disj.

testuji $T = A \cup B$

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(\underbrace{(A \cup B) \cap A}_{A}) + \lambda^*(\underbrace{(A \cup B) \cap A^c}_{B})$$

indukcí: konečná aditivita, tj.:

$A_j \in \mathcal{M}$, $j = 1, \dots, n$, disjunktní

$$\lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*(A_j)$$

zbývá: σ-aditivita, tj.:

$A_j \in \mathcal{M}$, disjunktní, $j \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j)}$$

$|\leq|$ platí vždy (Věta 17.2)

$|\geq|$ ... $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda^*(A_j)}_{= \lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)}$

$= \lim_{n\to\infty} \lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$

<u>4.</u> $A_j \in \mathfrak{M},\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$

BÚNO: A_j disjunktní, T libovolné

pomocné formule:

$$\boxed{\lambda^*(T) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*(T \cap A_j) + \lambda^*\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)}$$

<u>dk</u> ... indukcí dle n

- $n = 1$: měřitelnost A_1
- $n \to n+1$: měřitelnost A_{n+1},

  sestuji $T \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$

nyní víme z pomocné formule:

$$\lambda^*(T) \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda^*(T \cap A_j) + \lambda^*\Big(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)$$

$$\lambda^*(T) \geq \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(T \cap A_j)} + \lambda^*\Big(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big)$$

$$\geq \lambda^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (T \cap A_j)\Big)$$

... díky σ-subaditivitě (Věta 17.2.)

celkem tedy:

$$\boxed{\lambda^*(T) \geq \lambda^*\Big(T \cap \big(\bigcup_j A_j\big)\Big) + \lambda^*\Big(T \setminus \bigcup_j A_j\Big)}$$

leč $\leq$ platí vždy (opět Věta 17.2)

$$\Rightarrow \bigcup_j A_j \in \mathfrak{m}$$

Lemma 17.3 Buď $Q \subset \mathbb{R}^n$ interval.
Potom $Q \in \mathfrak{M}$ a platí $\lambda(Q) = \ell(Q)$.

dk: víme: $\lambda^*(Q) = \ell(Q)$, dle L.17.2.

stačí tedy ukázat měřitelnost Q

1. nechť Q je poloprostor, tj. $\exists i$

s.ř. $Q = \{ \underset{\substack{\shortparallel \\ (x_1, \dots x_n)}}{x} \in \mathbb{R}^n, x_i > c \}$

cíl: $\boxed{\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap Q) + \lambda^*(T \setminus Q) \quad \text{pro } \forall T \subset \mathbb{R}^n}$

avšak „$\leq$" platí vždy (Věta 17.2), tedy

stačí „$\geq$", navíc BÚNO: $\lambda^*(T) < +\infty$
(jinak platí triviálně)

$\varepsilon > 0$ libovolné: $\exists\, Q_j \subset \mathbb{R}^n$ intervaly

s.ř. $T \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j) < \lambda^*(T) + \varepsilon$$

položme: $\boxed{Q_j^+ = Q_j \cap Q, \quad Q_j^- = Q_j \setminus Q}$

zřejmě platí: $T \cap Q \subset \bigcup_j Q_j^+$

$T \setminus Q \subset \bigcup_j Q_j^-$,

navíc: Q_j^+, Q_j^- jsou intervaly,

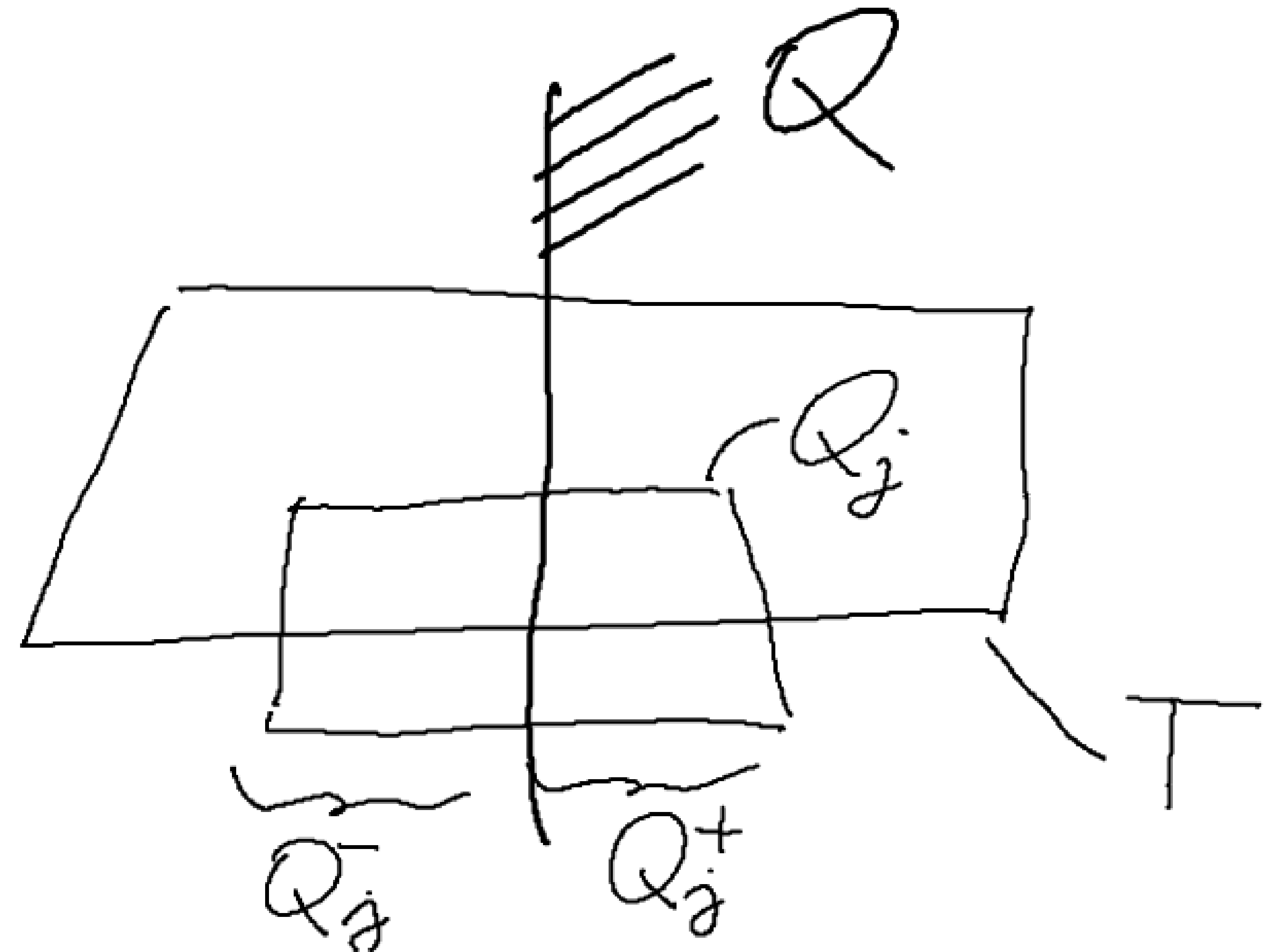
$$\ell(Q_j^+) + \ell(Q_j^-) = \ell(Q_j)$$

$$\Rightarrow \lambda^*(T \cap Q) + \lambda^*(T \setminus Q)$$

$$\leq \sum_j \ell(Q_j^+) + \sum_j \ell(Q_j^-)$$

$$= \sum_j \underbrace{\left(\ell(Q_j^+) + \ell(Q_j^-)\right)}_{\ell(Q_j)} \leq \lambda^*(T) + \varepsilon$$

... zbývá $\varepsilon \to 0+$



2. $Q \subset \mathbb{R}^n$ obecný interval

$\Rightarrow Q = \bigcap_{r=1}^{2n} Q_r$, Q_r vhodné poloprostory

leč: $Q_r \in \mathcal{M}$ (viz 1. KROK)

$\mathcal{M}$ uzavřené na průniky (σ-algebra)

Věta 17.4. Pro Lebesgueovu míru $(\lambda, \mathcal{M}, \mathbb{R}^n)$ platí:

1. $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřené, $F \subset \mathbb{R}^n$ uzavřené

$$\Rightarrow F, G \in \mathcal{M}$$

2. $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \in \mathcal{M} \Rightarrow a + M \in \mathcal{M}$,

($a \in \mathbb{R}^n$ libovolné) $\lambda(a+M) = \lambda(M)$

3. $M \subset \mathbb{R}^n$, $M \in \mathcal{M}$, $\mathcal{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

rotace (obecně izometrie) $\Rightarrow \mathcal{T}M \in \mathcal{M}$,

$$\lambda(\mathcal{T}M) = \lambda(M).$$

---

dk. 1. $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená ...

TRIK: $G = \bigcup \mathcal{g}$, kde

$\mathcal{g} = \{ Q \,;\, Q \subset \mathbb{R}^n$ je interval t.ž. $Q \subset G$; navíc Q má $\boxed{\text{racionální}}$ rohy $\}$

$\boxed{\text{spočetný}}$ systém množin z $\mathcal{M}$

(L.17.3)

$F \subset \mathbb{R}^n$ uzavřená $\Rightarrow F = G^c$, G otevř.

leč $G \in \mathcal{M} \Rightarrow G^c \in \mathcal{M}$

---

2. plyne z translační invariance λ^*, tedy i měřitelnosti dle Carath.

3.* (těžké)

Věta 17.5. [Nulové množiny v $\mathbb{R}^n$]

1. A je míry nula $\Leftrightarrow \lambda^*(A) = 0$
2. A je míry nula, $B \subset A$

   $\Rightarrow B$ je míry nula

3. $A_j, j \in \mathbb{N}$ míry nula $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ je míry nula

4. A spočetné $\Rightarrow$ A je míry nula.

---

dk. 1. „$\Rightarrow$": jasné (neboť $\lambda^*(A) = \lambda(A)$, pokud $A \in \mathfrak{M}$)

„$\Leftarrow$": stačí ukázat $\lambda^*(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{M}$,

tj. $\boxed{\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \setminus A) \text{ pro } T \subset R^n \text{ libovolné}}$

avšak $\boxed{\le}$ platí vždy (Věta 17.2),

obráceně stačí uvážit, že:

$$\lambda^*(\underbrace{T \cap A}_{\subset A}) + \lambda^*(\underbrace{T \setminus A}_{\subset T}) \le \underbrace{\lambda^*(A)}_{0} + \lambda^*(T)$$

2. $B \subset A \Rightarrow 0 \le \lambda^*(B) \le \lambda^*(A)$,

tedy $\lambda^*(A) = 0 \Rightarrow \lambda^*(B) = 0$,

a užiji bod 1.

3. dle V. 17.2: $\lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j)$

a opět užiji bod 1.

---

4. nechť $A = \{a_j, j \in \mathbb{N}\}$;

tedy $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, kde $A_j = \{a_j\}$

leč $\lambda(A_j) = \ell(A_j) = 0$

Lemma 17.3

(A_j ... jednobodové intervaly)

a užiji bod 3.