<u>Věta 16.5.</u> Nechť $\exists f_n'(x)$ vlastní pro $\forall x \in I$, nechť $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ v I, nechť $f_n(x_0) \to f(x_0)$ pro nějaké $x_0 \in I$.

Potom $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $f'(x) = g(x)$ v I.

---

dk. 1. KROK: (BC-ně) pro $f_n(x)$, $x \in I$

... dle V. 16.3. $\Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I.

víme: $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ v I, tj. (V. 16.3)

$$\exists n_0\ \forall x \in I\ \forall m, n \geq n_0 : |f_m'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2|I|}$$

navíc zřejmě : $$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

<u>TRIK</u>: $f_m(x) - f_n(x) =$

$$\underbrace{(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))}_{=\left[f_m(t) - f_n(t)\right]_{t=x_0}^{t=x}} + (f_m(x_0) - f_n(x_0))$$

$$\left[f_m(t) - f_n(t)\right]_{t=x_0}^{t=x} = (f_m - f_n)'(\xi)(x - x_0)$$

dle Lagrangeovy věty; celkem tedy:

$$|f_m(t)-f_n(t)| \le |f_m'(\xi)-f_n'(\xi)|\,|t-t_0|$$

$$+\,|f_m(t_0)-f_n(t_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\frac{|t-t_0|}{I}}_{<1}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

---

2. KROK: $x_1 \in I$ pevné ... $\exists f'(x_1)=g(x_1)$

pomocné fce $\varphi_n(t)=\dfrac{f_n(t)-f_n(t_1)}{t-t_1}$

$$\varphi(t)=\frac{f(t)-f(t_1)}{x-x_1}$$

aplikace Moore-Osgoodovy věty (V. 16.4) na funkce $\varphi_n(t), \varphi(t)$

$t \in P(t_1,\delta) \subset I$

dost malé

postačí když ověřit:

1. $\varphi_n(t) \rightrightarrows \varphi(x)$ v $P(x_1,\delta)$

dk. zřejmě $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$, $n\to\infty$

pro $\forall t \in P(x_1,\delta)$ zřejmé (KROK 1)

ověříme (BC-st) pro $\varphi_n(t)$

($\Rightarrow$ jsem hotov, neboť dle Věty 16.3

$\exists \tilde{\varphi}(t)$ t.ž. $\varphi_n(t) \rightrightarrows \tilde{\varphi}(t)$ v $P(x_1,\delta)$,

leč nutně $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$)

$\boxed{\text{TRIK}}$ (podobný jako výše):

$$\varphi_m(t) - \varphi_n(t) = \frac{f_m(t) - f_m(t_1)}{x - x_1} - \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{x - x_1}$$

$$= \frac{1}{x - x_1}\Big(\big(f_m(t) - f_n(t)\big) - \big(f_m(t_1) - f_n(t_1)\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{x - x_1}\Big[\big(f_m(t) - f_n(t)\big)\Big]_{t=x_1}^{t=x}$$

$$= f_m'(\xi) - f_n'(\xi),\quad \xi \in (x, x_1)$$

... a užiji (BC-st) pro $f_n'(x)$

2] předpoklad diferencovatelnosti $f_n(t)$:

$$\exists \lim_{x \to x_1} \varphi_n(t) = f_n'(t_1) = C_n \in \mathbb{R}$$

Moore-Osgood sedy dává:

$$(*) \quad \exists\, C = \lim_{n \to \infty} f_n'(x_1)$$

$$(**) \quad \exists \lim_{x \to x_1} \varphi(x) = C$$

leč: $PS(*) = g(x_1)$, neboť $f_n'(x) \to g(x)$

$LS(*) = f'(x_1)$, definice derivace

<u>Věta 16.6.</u> Nechť $\sum f_k(x)$ konvergují stejnoměrně v I. Pak $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v I.

<u>dk.</u> cíl $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall x \in I\ \forall n \geq n_0$

$$|f_n(x)| < \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ dáno ... $\exists n_0\ \forall x \in I\ \forall n \geq n_0 - 1$

$$|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f_n(t)| = |s_n(t) - s_{n-1}(t)|$$
$$= |s_n(t) - s(t) + s(t) - s_{n-1}(t)|$$
$$\leq \underbrace{|s_n(t) - s(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|s(t) - s_{n-1}(t)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

pro $\forall n \geq n_0$, $\forall t \in I$.

Věta 16.7. Nechť $f_k(t): I \to \mathbb{C}$ dány.
Potom (1) $\sum f_k(t)$ konv. stejn. v I
$\iff$ (2) $\sum f_k(t)$ splňuje v I (BC-s-p).

Dk. (1) $\iff$ $\exists s(t)$ t. ž. $s_n(t) \rightrightarrows s(t)$ v I
(definice)

$\Updownarrow$ Věta 16.3

$s_n(t)$ splňují (BC-s), neboli:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall t \in I \; \forall m, n \geq n_0: |s_m(t) - s_n(t)| < \varepsilon$

leč pozorujeme (BÚNO $m = n+p$, $p \geq 1$)

$$s_m(t) - s_n(t) = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(t), \text{ tj.}$$

(BC-sl) pro $s_n(t)$ $\iff$ (BC-sl-ř) pro $\sum\limits_k f_k(t)$

<u>Věta 16.8.</u> Nechť $\sum f_k(t)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I. Pak $\sum f_k(t)$ konverguje stejnoměrně v I.

<u>Dk.</u> zřejmě
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(t)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(t)|\right|$$

a tedy: (BC-sl-ř) pro $\sum |f_k(t)|$

$\Rightarrow$ (BC-sl-ř) pro $\sum f_k(t)$

Věta 16.9. [Weierstrass.]

nechť 1. $|f_k(x)| \le a_k$, $\forall x \in I, \forall k$

2. $\sum a_k$ konverguje

Pak $\sum f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I.

dk. cíl: (B-C-k) pro $\sum |f_k(x)|$, tj.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall x \in I\ \forall n \ge n_0\ \forall l \ge 1$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+l} |f_k(x)| \right| < \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ dáno ... díky konv. $\sum a_k$

$\exists n_0\ \forall n \ge n_0\ \forall l \ge 1$.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+l} a_k \right| < \varepsilon$$

avšak: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+l} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+l} a_k$ pro $\forall x \in I$

(dle předpokladu)

Příkl. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{k^2}\right)$

- konv. abs. stejn. v $(-M, M)$, $M>0$ pevné, libovolné

dk. platí $|\sin y| \leq |y|$, $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |f_k(x)| = \left|\sin \frac{x}{k^2}\right| \leq \left|\frac{x}{k^2}\right| \leq \underbrace{M \cdot \frac{1}{k^2}}_{a_k}$$

… $\sum \frac{1}{k^2}$ konv.

… užiji Větu 16.9

- nekonv. stejn. v $\mathbb{R}$

dk. ukážu, že $\sin\left(\frac{x}{n^2}\right) \not\rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}$

(závěr díky Větě 16.6)

Lemma 16.1: $\sigma_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin \frac{x}{n^2}\right| \geq 1$

(vol $x = n^2$)

a tedy $\sigma_n \not\to 0$, $n \to \infty$.

Věta 16.10. [Leibniz – stejn. verze.]

Nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I, nechť pro $\forall x \in I$ je med. $\{g_k(x)\}$ monotónní v k.

Pak $\sum (-1)^k g_k(x)$ konv. stejn. v I

---

důk. BÚNO $k = 0, 1, \dots,$

$g_k(x) \geq 0$, nerostoucí v k, tj:

pro $\forall x \in I$: $g_0(x) \geq g_1(x) \geq g_2(x) \geq \cdots$

označme: $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k g_k(x)$

$\boxed{\text{cíl:}}$ ověříme (BC-st) pro $s_n(x)$

($\Rightarrow$ jsem hotov díky Větě 16.3)

pozorují: $s_0(x) = g_0(x) \geq 0$

$$s_2(x) = \underbrace{g_0(x) - g_1(x)}_{\geq 0} + g_2(x)$$

$$= g_0(x) + \underbrace{(g_2(x) - g_1(x))}_{\leq 0}$$

celkem tedy: $s_0(x) \ge s_2(x) \ge 0$;

obecněji: $s_{2n}(x) \ge 0$, nerostoucí (vůči n)

analogicky pro liché částečné součty

$$0 \le s_1(x) \le s_3(x),$$

obecně pak: $s_{2l+1}(x) \ge 0$, neklesající (vůči l)

dále platí: $s_{2n}(x) \ge s_{2l+1}(x)$,

pro $\forall n, l \ge 0$ celé

$\varepsilon > 0$ dáno ... víme, že $g_n(x) \rightrightarrows 0$ v I

tj: $\exists n_0 \; \forall x \in I \; \forall n \ge n : |g_n(x)| < \varepsilon$

<u>BÚNO</u> $n_0 \in \mathbb{N}$ sudé ... $\forall m, n \ge n_0$

$$s_m(x), s_n(x) \in [s_{n_0+1}(x), s_{n_0}(x)]$$

$$\Rightarrow |s_m(x) - s_n(x)| \le |s_{n_0+1}(x) - s_{n_0}(x)|$$

$$= g_{n_0+1}(x) < \varepsilon, \forall x \in I.$$

Příkl. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$, pro $\forall x \in (-1,1)$

... víme z minula, viz Kap. 11 (mocninné řady)

$\boxed{\text{LS:}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k$ konv. stejn. v $[0,1]$

... Věta 16.12: $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konv. stejn. (nezávisí na x)

$\{x^k\}_k$ omezené $\in [0,1]$ neklesající mě k

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$\boxed{\text{PS:}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \ln(1+x) = \ln 2$

celkem tedy: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

$= \ln 2$