poslední úprava 27. prosince 2023

16. Stejnoměrná konvergence.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ konvergují v I bodově k funkci $f(x)$, jestliže pro $\forall x \in I$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) .$$

Značíme $f_n(x) \to f(x)$ v I.

Příklady. ① $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$. Potom $f_n(x) \to \exp x$ v $\mathbb{R}$.
② $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$. Potom $f_n(x) \to \operatorname{sgn} x$ v $\mathbb{R}$.
③ $f_n(x) = n^2 x \exp(-nx) \to 0$ v $[0, \infty)$.

Poznámka. Příklady demonstrují některé nedostatky bodové konvergence.
Pokud $f_n(x) \to f(x)$, a $f_n(x)$ jsou spojité, pak $f(x)$ nemusí být spojitá (příklad 2).
Pokud $f_n(x) \to f(x)$ v $[a, b]$, nemusí být $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ (příklad 3 pro $[a, b] = [0, 1]$).
To nás motivuje k zavedení silnějšího pojmu konvergence funkcí.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x) : I \to \mathbb{R}$ konvergují v I stejnoměrně k funkci $f(x)$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0)\Big[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big] . \tag{1}$$

Značíme $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I.

Poznámka. $f_n(x) \to f(x)$ bodově v I, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in I)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)\Big[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big] . \tag{2}$$

Rozdíl je v pořadí kvantifikace x a n_0. Při bodové konvergenci nejprve fixuji x, pak volím n_0, tj. n_0 může obecně záviset na x.
Při stejnoměrné konvergenci zvolené n_0 nezávisí na $x \in I$.

Věta 16.1. [Zachování spojitosti při stejn. konv.] Nechť $f_n(x)$ jsou spojité v I, nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I. Potom $f(x)$ je spojitá v I.

Věta 16.2. [Záměna limity a integrálu při stejn. konv.] Nechť $f_n(x)$ jsou spojité v omezeném, uzavřeném intervalu $[a, b]$, nechť $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $[a, b]$. Potom $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ pro $n \to \infty$.

Opakování. $K = \sup_{x\in I} g(x)$ znamená:

(i) $g(x) \leq K$ pro $\forall x \in I$

(ii) $\forall K' < K\ \exists x \in I$ tak, že $g(x) > K'$.

Souhrnně: K je nejmenší horní odhad funkce $g(x)$ na I.

Lemma 16.1. Nechť $f_n(x)$ jsou definovány v I. Potom je ekvivalentní:
(1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I

(2) $\sigma_n \to 0$ pro $n \to \infty$, kde $\sigma_n := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$
(3) pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset I$ platí: $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$ pro $n \to \infty$

Poznámka. Často užívané důsledky:
1. Jestliže existují a_n (čísla nezávislá na x) taková, že $a_n \to 0$ a platí $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$ pro $\forall x \in I$, tak potom $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I.
2. Jestliže existují $x_n \in I$ taková, že $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$, pak $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ v I.

Příklad. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Potom $f_n(x) \to 0$ v $(0,\infty)$; $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ v $(0,\infty)$; pro $\forall \Delta > 0$ pevné $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v (Δ,∞); pro žádné $\Delta > 0$ není $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $(0,\Delta)$.

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$ lokálně stejnoměrně v I, jestliže

$$(\forall x_0 \in I)(\exists \delta > 0)\big[f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ v } I \cap U(x_0,\delta)\big] .$$

Značíme $f_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f(x)$ v I.

Příklad. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Potom $f_n(x) \not\rightrightarrows 0$ v $(0,\infty)$, avšak $f_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ v $(0,\infty)$.

Poznámky. Stejnoměrná konvergence se přenáší na menší množinu, tj. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I, $J \subset I \implies f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v J.
Dále: stejnoměrná konvergence $\implies$ lokálně stejnoměrná konvergence $\implies$ bodová konvergence (žádnou implikaci nelze obrátit)

Poznámka. Připomeňme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje (tj. $\exists a \in \mathbb{R}$ tak, že $a_n \to a$), právě když platí Bolzano-Cauchyho podmínka konvegence:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall m,n \ge n_0\big)\big[|a_m - a_n| < \varepsilon\big] . \qquad \text{(BC)}$$

Definice. Řekneme, že funkce $f_n(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall m,n \ge n_0\big)\big[|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big] . \quad (\mathrm{BC-st})$$

Věta 16.3. [B.C. podmínka stejnoměrné konvergence.] Nechť $f_n(x)$ jsou definovány v I. Potom je ekvivalentní:
(1) existuje funkce $f(x)$ taková, že $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I
(2) $f_n(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence

Důsledek. $C([a,b])$ je úplný metrický prostor (vzhledem k $\varrho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$).

Poznámka. Jsou-li $f_n(x) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, pak obecně

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to\infty} f_n(x)\Big) \ne \lim_{x\to\infty}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) ;$$

například pro $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x/n)$ máme $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)\Big) = \pi/2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = 0$.

Věta 16.4. [Moore-Osgood.] Nechť $f_n(x)$, $f(x)$ jsou definovány v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$ (x_0, $\delta > 0$ pevné.) Nechť
1. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{P}(x_0, \delta)$;
2. pro $\forall n$ pevné existuje konečná $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$, značme ji c_n.

Potom
1. existuje konečná $\lim_{n \to \infty} c_n$, značme ji c;
2. platí $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$.

Poznámka. Závěr 2 vlastně říká

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right).$$

Může být $x_0 = \pm\infty$, a platí jednostranné verze (tj. pro $x \to x_0\pm$, pracuji na $\mathcal{P}_\pm(x_0, \delta)$.)

Poznámka. Další nevýhodou bodové konvergence je, že obecně

$$f_n(x) \to f(x) \not\Rightarrow f_n'(x) \to f'(x),$$

dokonce ani

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \not\Rightarrow f_n'(x) \to f'(x).$$

Příklad. Polož $f_n(x) = \sin(nx)/n$; potom $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}$, leč $f_n'(x) = \cos(nx) \not\to 0$ pro žádné $x \in \mathbb{R}$.

Věta 16.5. [Derivace člen po členu.] Nechť I je omezený, otevřený interval. Nechť $\exists f_n'(x)$ vlastní pro každé $x \in I$, $\forall n$, a nechť existují funkce $f(x)$, $g(x)$ takové, že $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ v I, a $f_n(x_0) \to f(x_0)$ pro alespoň jedno $x_0 \in I$.
Potom $f'(x)$ existuje a rovná se $g(x)$ pro každé $x \in I$.

Poznámka. Věta říká, že za uvedených předpokladů

$$\left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \to \infty} f_n'(x).$$

Věta 16.5'. [Integrace člen po členu.] Nechť I je omezený, otevřený interval. Nechť $u_n(x) \rightrightarrows u(x)$ v I, nechť $\int u_n(x)\,dx = U_n(x)$ v I, a nechť $U_n(x_0) \to U(x_0)$ pro alespoň jeden bod $x_0 \in I$.
Potom $\int u(x)\,dx = U(x)$ v I.

Poznámka. Závěr věty zapsaný jinak:

$$\int \lim_{n \to \infty} u_n(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int u_n(x)\,dx.$$

Definice. Nechť $f_k(x) : I \to \mathbb{C}$ jsou dány. Označme

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Řekneme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

konverguje stejnoměrně v I, jestliže existuje funkce $s(x) : I \to \mathbb{C}$ taková, že $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v I.
Řekneme, že řada konverguje lokálně stejnoměrně v I, jestliže existuje $s(x)$ taková, že $s_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} s(x)$ v I.

Věta 16.6. [Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady.]
Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Potom $f_n(x) \rightrightarrows 0$ v I.

Definice. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ splňuje v I Bolzano-Cauchyho podmínku (BC-st-r) stejnoměrné konvergence, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall n \geq n_0\big)\big(\forall p \in \mathbb{N}\big)\Big[\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\Big| < \varepsilon\Big] .$$

Věta 16.7. [B.C. podmínka stejnoměrné konvergence řady.] Nechť $f_k(x) : I \to \mathbb{C}$ jsou dány. Potom je ekvivalentní:
(1) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ splňuje v I (BC-st-r)

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I, jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ konverguje stejnoměrně v I.

Věta 16.8. [O absolutně stejnoměrné konvergenci.] Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I. Potom konverguje stejnoměrně v I.

Věta 16.9. [Weierstrass.] Jsou dány $f_k(x) : I \to \mathbb{C}$. Nechť existují čísla a_k (nezávislá na x) taková, že
1. $|f_k(x)| \leq a_k$ pro $\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$;
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{k^2}\right)$ konverguje lokálně absolutně stejnoměrně v $\mathbb{R}$. Nekonverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Poznámka. Užitečné odhady: $|\sin y| \leq |y|$, $|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$ pro $\forall y \in \mathbb{R}$; $0 \leq \ln(1+y) \leq y$ pro $\forall y \geq 0$.

Věta 16.10. [Stejnoměrná verze Leibnizova kritéria.] Nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I, nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\big\{g_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Definice. Řekneme, že $f_n(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I, jestliže

$$\big(\exists M > 0\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big[|f_n(x)| \leq M\big] .$$

Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ má v I stejnoměrně omezené částečné součty, jestliže

$$\big(\exists M > 0\big)\big(\forall x \in I\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\Big[\big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\big| \leq M\Big] .$$

*** Věta 16.11.** [Stejnoměrná verze Dirichletova kritéria.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ má v I stejnoměrně omezené částečné součty, nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I, a nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\big\{g_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní.
Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Poznámka. Z Lemmatu 10.4 plyne pro $\forall x \neq 2k\pi$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} , \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} .$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ konverguje stejnoměrně v $[\delta, 2\pi - \delta]$ pro $\delta > 0$ pevné. Nekonverguje stejnoměrně v $[0, \delta]$.

Poznámka. Nechť existuje n_0 (nezávislé na x) takové, že $f_k(x) = g_k(x)$ pro $\forall x \in I$, $\forall k \geq n_0$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I, právě když $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

*** Věta 16.12.** [Stejnoměrná verze Abelova kritéria.] Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Nechť $g_k(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I, a nechť pro $\forall x \in I$ pevné je posloupnost $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I.

Věta 16.13. [Zachování spojitosti při stejn. konv. řady.] Nechť $f_k(x) \in C(I)$, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Označme $s(x)$ její součet. Potom $s(x) \in C(I)$.

Příklad. Z dřívějška víme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x) , \qquad \forall x \in (-1, 1) .$$

Podle Věty 16.12 řada vlevo konverguje stejnoměrně v $[0, 1]$; podle Věty 16.13 je její součet $s(x)$ spojitý v $[0, 1]$, speciálně je spojitý v bodě 1 zleva.
Tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = s(1) = \lim_{x \to 1-} s(x) = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2 .$$

Třetí rovnost díky tomu, že $s(x) = \ln(1+x)$ na $P_-(1)$; čtvrtá ze spojitosti logaritmu.

Věta 16.14. [Záměny sumy a integrálu při stejn. konv.] Nechť $f_k(x) \in C(I)$, kde $I = [a, b]$ je omezený, uzavřený interval. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Potom

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx .$$

Věta 16.15. [Záměna sumy a derivace při stejn. konv.] Nechť $f_k(x)$ jsou diferencovatelné v I (otevřený omezený interval). Nechť pro nějaké $x_0 \in I$ pevné $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ konverguje, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Potom součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je diferencovatelná funkce a platí

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,, \qquad \forall x \in I\,.$$

Poznámka. Výsledky kapitoly lze přímočaře zobecnit na situaci $f_n(x) : M \to Y$, kde $M \subset X$ a X, Y jsou metrické prostory. (V případě řad musí být Y vektorový prostor, ve větách o B.C. podmínce musí být Y úplný.)

Poznámka. Speciálním případem řady funkcí je mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{MR}$$

Viz kapitola 11 minulého semestru. Je-li R poloměr konvergence, platí:
Tvrzení 1. Řada (MR) konverguje absolutně stejnoměrně na $U(0,r)$ pro každé $r < R$; konverguje lokálně absolutně stejnoměrně na $U(0,R)$.
Tvrzení 2. [Abelova věta] Nechť řada (MR) konverguje pro nějaké $x = z \in \mathbb{C}$, kde $|z| = R$. Potom konverguje stejnoměrně na úsečce $[0; z]$.

17. Lebesgueova míra.

Značení. Je-li X libovolná množina; pak 2^X znač potenční množinu neboli množinu všech podmnožin X. Připomeňme dále: rozdíl množin $A \setminus B = \{x \in A :\ x \notin B\}$, spočetné sjednocení množin (index j probíhá $\mathbb{N}$):

$$\bigcup_j A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{x :\ \exists j\ x \in A_j\},$$

spočetný průnik množin:

$$\bigcap_j A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{x :\ \forall j\ x \in A_j\}.$$

De Morganovy vzorce:

$$B \setminus \bigcup_j A_j = \bigcap_j (B \setminus A_j), \qquad B \setminus \bigcap_j A_j = \bigcup_j (B \setminus A_j).$$

Definice. Nechť X je libovolná množina. Řekneme, že $\mathscr{S} \subset 2^X$ je σ-algebra, pokud

1. $\emptyset$, $X \in \mathscr{S}$

2. $A \in \mathscr{S} \implies X \setminus A \in \mathscr{S}$

3. jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$, $j \in \mathbb{N}$, je $\bigcup_j A_j \in \mathscr{S}$

Poznámka. Z vlastností σ-algebry dále plyne:

- jsou-li A, $B \in \mathscr{S}$, je také $A \setminus B \in \mathscr{S}$
- jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$, $j \in \mathbb{N}$, je $\bigcap_j A_j \in \mathscr{S}$

Souhrně řečeno je σ-algebra systém množin, který je uzavřený na spočetné (=sigma) opakování množinových operací.

Příklady. $\mathscr{S} = \{\emptyset,\ X\}$ a $\mathscr{S} = 2^X$ jsou σ-algebry.

Definice. Nechť X je libovolná množina, $\mathscr{S} \subset 2^X$. Funkce $\mu : \mathscr{S} \to [0, +\infty]$ se nazve míra na X, jestliže

1. $\mathscr{S}$ je σ-algebra;
2. $\mu\emptyset = 0$
3. jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$, $j \in \mathbb{N}$ disjunktní, je

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j .$$

Trojice $(X, \mathscr{S}, \mu)$ se nazývá prostor s mírou, prvky $\mathscr{S}$ se nazývají měřitelné nebo μ-měřitelné množiny. Třetí vlastnost míry se nazývá σ-aditivita.

Příklady. ① Počítací míra p: X je libovolná množina, $\mathscr{S} = 2^X$; pA = počet prvků A, je-li A konečná, a $pA = \infty$, je-li A nekonečná.
② Diracova míra δ_a v bodě a: X je libovolná množina, $a \in X$ pevně zvolený bod, $\mathscr{S} = 2^X$. $\delta_a(A) = 1$ pokud $a \in A$ a $\delta_a(A) = 0$ pokud $a \notin A$.
③ Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$ - zobecnění pojmu objem. Korektní zavedení Lebesgueovy míry je hlavním úkolem této kapitoly. Nelze $\mathscr{S} = 2^{\mathbb{R}^n}$, tj. existují Lebesgueovsky neměřitelné množiny, u nichž by pokus o přiřazení objemu vedl ke sporu, viz následující –

Banach-Tarského paradox. Nechť $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ jsou libovolné (!) otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$, kde $n \geq 3$. Potom existuje $N \in \mathbb{N}$ a množiny F_j, $j = 1, \ldots, N$ (vzájemně disjunktní) a množiny G_j, $j = 1, \ldots, N$ (též vzájemně disjunktní) takové, že

$$\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{N} F_j , \qquad \mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{N} G_j .$$

Navíc, G_j vznikne z F_j posunutím a otočením.

Věta 17.1. [Základní vlastnosti míry.] Nechť $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom

1. $A, B \in \mathscr{S}$, $A \subset B \implies \mu A \le \mu B$;
2. jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$ libovolné, pak $\mu\left(\bigcup_j A_j\right) \le \sum_{j=1} \mu A_j$, tzv. σ-subaditivita míry.
3. jsou-li $A_j \in \mathscr{S}$, $A_j \subset A_{j+1}$ pro $j \in \mathbb{N}$, pak $\mu(\bigcup_j A_j) = \lim_{j\to\infty} \mu A_j$;
4. jsou-li $B_j \in \mathscr{S}$, $B_j \supset B_{j+1}$ pro $j \in \mathbb{N}$, navíc $\mu B_1 < \infty$, pak $\mu(\bigcap_j B_j) = \lim_{j\to\infty} \mu B_j$.

Poznámky. Předpoklad $\mu B_1 < \infty$ v bodě 3 je podstatný: μ počítací míra na $\mathbb{N}$, $B_j = \{n \in N : \ n \ge j\}$. Pak $\mu B_j = +\infty \not\to \mu(\bigcap_j B_j) = \mu(\emptyset) = 0$.

Trik zdisjunktnění. Pro libovolné množiny A_j, $j \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\tilde{A}_j := A_j \setminus \bigcup_{i<j} A_i.$$

Potom $\tilde{A}_j$ jsou vzájemně disjunktní; přitom

$$\bigcup_{j\le n} A_j = \bigcup_{j\le n} \tilde{A}_j, \qquad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \tilde{A}_j.$$

Jsou-li A_j měřitelné, jsou také $\tilde{A}_j$ měřitelné.

Definice. Intervalem v $\mathbb{R}$ rozumíme některou z množin

$$I = (a,b),\ [a,b],\ (a,b],\ [a,b).$$

Definujeme délku intervalu $\ell_1(I) = b - a$. Připouštíme prázdné, jednobodové i neomezené intervaly. Intervalem v $\mathbb{R}^n$ rozumíme ,,kvádr“

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_j \in I_j\right\},$$

kde I_j jsou intervaly v $\mathbb{R}$. Objemem intervalu $Q \subset \mathbb{R}^n$ rozumíme

$$\ell_n(Q) = \ell_1(I_1)\ell_1(I_2)\ldots\ell_1(I_n);$$

pro účely této definice klademe $0 \cdot \infty = 0$.
Pokud je z kontextu jasné, že $Q \subset \mathbb{R}^n$, píšeme $\ell(Q)$ místo $\ell_n(Q)$.

Poznámky. Mezi intervaly speciálně patří: prázdná množina, bod, přímka, rovina a vůbec ,,útvary nižší dimenze“ (jejichž objem je nula). Dále otevřený poloprostor

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_j > c\right\} = \mathbb{R} \times \ldots (c, +\infty) \cdots \times \mathbb{R};$$

a uzavřený poloprostor

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n;\ x_j \ge c\right\} = \mathbb{R} \times \ldots [c, +\infty) \cdots \times \mathbb{R}.$$

Otevřeným (resp. uzavřeným) intervalem míníme $Q = I_1 \times \cdots \times I_n$, jsou-li všechny $I_j \subset \mathbb{R}$ otevřené (resp. uzavřené).
Otevřený (resp. uzavřený) interval lze napsat jako průnik konečně mnoha otevřených (resp. uzavřených) poloprostorů. Otevřený (uzavřený) interval je otevřená (uzavřená) podmožina v $\mathbb{R}^n$ vzhledem k obvyklé metrice.

Definice. [Vnější Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$.] Pro libovolnou $M \subset \mathbb{R}^n$ definujeme

$$\lambda_n^*(M) = \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell_n(Q_j);\ \ Q_j \subset \mathbb{R}^n \text{ jsou intervaly, } M \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \Big\}.$$

Číslo $\lambda_n^*(M)$ se nazývá vnější Lebesgueova míra množiny $M \subset \mathbb{R}^n$. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme opět λ^* místo λ_n^*.

Poznámky. Snadno nahlédneme, že platí:

- $0 \le \lambda^*(M) \le +\infty$
- $\lambda^*(\emptyset) = \lambda^*(\{a\}) = 0$
- $A \subset B \implies \lambda^*(A) \le \lambda^*(B)$
- λ^* je translačně invariantní, tj. $\lambda^*(M) = \lambda^*(a + M)$ pro každé $a \in \mathbb{R}^n$, kde

$$a + M := \big\{a + m;\ m \in M\big\}.$$

- těžší je dokázat, že λ^* se nemění ani otočením množiny (je rotačně invariantní)

Věta 17.2. Nechť $M_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$, jsou *libovolné* množiny. Potom

$$\lambda^*\big(\bigcup_j M_j\big) \le \sum_j \lambda^*(M_j).$$

Jinými slovy, vnější míra je σ-subaditivní.

Lemma 17.1. [O konečném podpokrytí.] Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $K \subset X$ kompaktní, nechť $K \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, kde $A_j \subset X$ jsou otevřené. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.

*** Lemma 17.2.** Nechť Q, $Q_j \subset \mathbb{R}^n$ jsou intervaly takové, že $Q \subset \bigcup_j Q_j$. Pak $\ell(Q) \le \sum_j \ell(Q_j)$.

Důsledek. Pro každý interval $Q \subset \mathbb{R}^n$ je $\lambda^*(Q) = \ell(Q)$.

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazve měřitelná podle Carathéodoryho, jestliže

$$\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \setminus A)$$

platí pro libovolnou „testovací" množinu $T \subset \mathbb{R}^n$.

Věta 17.3. [Carathéodory.] Označme

$$\mathscr{M}_n = \{M \subset \mathbb{R}^n;\ M \text{ je měřitelná dle Carathéodoryho}\}.$$

Potom $\mathscr{M}_n$ je σ-algebra a $\lambda_n^* : \mathscr{M}_n \to [0, +\infty]$ je míra.

Terminologie. $\mathscr{M}_n$ nazýváme Lebesgueovsky měřitelné podmnožiny $\mathbb{R}^n$; Lebesgueovu míru množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ definujeme takto:

$$\lambda_n(M) := \begin{cases} \lambda_n^*(M), & \text{pokud } M \in \mathscr{M}_n, \\ \text{není definováno pro } M \notin \mathscr{M}_n. \end{cases}$$

Píšeme obvykle $\mathscr{M}$, λ, tj. symbol n se vynechává, je-li z kontextu jasné, v jakém $\mathbb{R}^n$ se pohybujeme.

Lemma 17.3. Každý interval $Q \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelný a $\lambda(Q) = \ell(Q)$.

Věta 17.4. [Další vlastnosti Lebesgueovy míry.]

1. Otevřené a uzavřené množiny jsou měřitelné.
2. Lebesgueova míra je translačně invariantní.
3. * Lebesgueova míra je rotačně invariantní.

Poznámka. Z důkazu předchozí věty též vyplývá: je-li $G \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná, otevřená množina, pak $\lambda(G) > 0$.

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ se nazve množina (Lebesgueovy) míry nula (též nulová množina), jestliže $A \in \mathscr{M}_n$ a $\lambda_n(A) = 0$.

Věta 17.5. [Vlastnosti Lebesgueovsky nulových množin.]

1. A je množina míra nula, právě když $\lambda^*(A) = 0$.
2. A je množina míra nula, $B \subset A \implies B$ je množina míra nula.
3. A_j jsou množiny míry nula, $j \in \mathbb{N} \implies \bigcup_j A_j$ je množina míry nula.
4. Každá spočetná množina má Lebesgueovu míru nula.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná. Řekneme, že výrok $V(x)$ platí skoro všude (zkratka „s.v.") v M, jestliže existuje množina míry nula $N \subset M$ tak, že $V(x)$ platí pro každé $x \in M \setminus N$.

Příklady. ① Skoro všechna reálná čísla jsou iracionální ($N = \mathbb{Q}$).
② Funkce $\varphi : (x, y) \mapsto |x| + |y|$ je diferencovatelná skoro všude v $\mathbb{R}^2$. Zde $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0 \text{ nebo } y = 0\}$, což je sjednocení dvou přímek (intervaly nulového objemu).

18. Lebesgueův integrál.

Cíl kapitoly: definovat $\int_M f\, d\lambda$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $f(x) : M \to \mathbb{R}$ je funkce a $\lambda = \lambda_n$ je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$.
Chceme, aby integrál fungoval pro co nejširší třídu funkcí, a měl některé rozumné vlastnosti:

- $\int_M (f+g) = \int_M f + \int_M g$ (linearita)
- $f \leq g \implies \int_M f \leq \int_M g$ (monotonie)
- $\int_M c = c\lambda(M)$
- rozumné věty o ,,záměně limity a integrálu”, tj. (za vhodných předpokladů):

$$\lim_{j\to\infty} \int_M f_j = \int_M \lim_{j\to\infty} f_j, \qquad \frac{d}{da} \int_M f = \int_M \frac{\partial f}{\partial a}, \qquad \text{atd.}$$

Nám dosud známé integrály (Riemannův a Newtonův) fungují jenom pro M rovná se reálný interval; především však integrují příliš málo funkcí a nemají žádné (rozumně použitelné) věty o záměně limity a integrálu.
Názorný význam integrálu je ,,objem pod grafem funkce”. Protože míru (objem) už umíme měřit ve všech $\mathbb{R}^n$, mohli bychom rovnou definovat:

$$\int_M f d\lambda_n = \lambda_{n+1}(\Gamma^+) - \lambda_{n+1}(\Gamma^-), \tag{3}$$

má-li pravá strana smysl, kde

$$\Gamma^+ = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in M,\ 0 < y < f(x)\big\},$$
$$\Gamma^- = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in M,\ f(x) < y < 0\big\}.$$

My podáme složitější (nicméně ekvivalentní) definici – ze dvou důvodů:

1. z definice (3) bychom těžko dokazovali například linearitu
2. níže uvedená definice zahrne obecnou situaci integrování podle libovolné míry (tj. nejen Lebesgueovy)

Značení. Máme prostor s mírou $(X, \mathscr{M}, \lambda)$, tj. $\mathscr{M}$ je σ-algebra měřitelných podmnožin X a λ je míra. Dále bude a $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \in \mathscr{M}$. (Lebesgeueova míra bude důležitý speciální případ.) Budeme také značit:

$$\{f > c\} = \{x \in M;\ f(x) > c\}, \qquad \{f \in I\} = \{x \in M;\ f(x) \in I\}, \quad \text{atd.}$$

Definice. Funkce $f : M \to \mathbb{R}^*$ se nazve měřitelná, jestliže M je měřitelná množina a dále pro každé $c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f > c\}$ měřitelná.

Lemma 18.1. [Ekvivalentní definice měřitelnosti.] Nechť M je měřitelná množina a $f : M \to \mathbb{R}^*$. Potom je ekvivalentní:

1. f je měřitelná;
2. pro $\forall c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f \geq c\}$ měřitelná;

3. pro $\forall c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f < c\}$ měřitelná;
4. pro $\forall c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f \le c\}$ měřitelná;
5. pro každý interval $I \subset \mathbb{R}^*$ je množina $\{f \in I\}$ měřitelná;
6. pro každou otevřenou $G \subset \mathbb{R}^*$ je množina $\{f \in G\}$ měřitelná.

Lemma 18.2 Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $f : M \to \mathbb{R}$. Nechť $M = G \cup N$, kde G je otevřená v $\mathbb{R}^n$, f je spojitá v G, a N je množina míry nula. Potom f je měřitelná v M.

Důsledek. Je-li $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ spojitá všude až na konečně bodů, je měřitelná v (a, b).

Lemma 18.3. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je měřitelná; nechť $f(M) \subset G$, kde G je otevřená (v $\mathbb{R}$). Nechť $\phi : G \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $\phi \circ f$ je měřitelná v M.

Poznámka. Obecně při skládání měřitelných funkcí nemusí vyjít měřitelná funkce; dokonce ani složení měřitelná (vnější) a spojitá (vnitřní) nemusí být měřitelné.

Věta 18.1.[1] [Zachování měřitelnosti.] Nechť f, g, $f_j : M \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné funkce. Potom

1. αf, $f + g$, $f - g$, fg, f/g jsou měřitelné na množině $S \subset M$, kde má daná operace smysl;
2. $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, f^+, f^-, $|f|$ jsou měřitelné v M;
3. $\sup_j f_j$, $\inf_j f_j$ jsou měřitelné v M; funkce $\lim_j f_j$ na množině, na níž je definována

Definice. Charakteristickou funkcí množiny A rozumíme

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A. \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ se nazve jednoduchá v M, jestliže existují množiny $A_j \subset M$ a čísla $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ tak, že

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x), \qquad x \in M.$$

Jsou-li navíc A_j měřitelné, hovoříme o jednoduché měřitelné funkci.

Poznámky. ① Jednoduchou funkci lze vyjádřit více způsoby; vyjádření je jednoznačné, pokud požadujeme, aby A_j byly disjunktní a čísla c_j vzájemně různá, nenulová.
② Pozorování: f je jednoduchá měřitelná v M $\iff$ f je měřitelná v M a $f(M)$ je konečná množina

[1] Důkaz pouze pro součet a supremum.

Věta 18.2. Nechť f je nezáporná, měřitelná funkce v M. Potom existují nezáporné, jednoduché měřitelné funkce f_k takové, že $f_k(x) \to f(x)$ a navíc posloupnost $\{f_k(x)\}_k$ je neklesající pro každé $x \in M$.

Značení. Výše uvedený způsob konvergence značíme stručně: $0 \leq f_k \nearrow f$ v M.

Definice. [Abstraktní Lebesgueův integrál.] Nechť $f : M \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce.

1. je-li f jednoduchá, tj. $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$, definujeme $\int_M f d\lambda = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda(A_j)$.
2. je-li f nezáporná, klademe
$$\int_M f d\lambda = \sup \Big\{ \int_M s d\lambda;\ s \text{ jednoduchá měřitelná v } M,\ 0 \leq s \leq f \Big\}.$$
3. pro obecnou f definujeme ($f^+ = \max\{0, f\}$, $f^- = \max\{0, -f\}$)
$$\int_M f d\lambda = \int_M f^+ d\lambda - \int_M f^- d\lambda,$$
má-li pravá strana smysl (tj. není-li tvaru $+\infty - \infty$).

Poznámky. Ohledně korektnosti definice je třeba si rozmyslet: integrál jednoduché funkce nezávisí na jejím vyjádření, a jsou-li $s \leq t$ jednoduché, pak $\int_M s d\lambda \leq \int_M t d\lambda$.

Terminologie a značení. Chceme-li zvýraznit proměnnou, píšeme $\int_M f(x) d\lambda(x)$. Naopak v případě $M \subset \mathbb{R}^n$ a λ - Lebesgueova míra zpravidla vynecháváme symbol pro míru, tj. píšeme pouze $\int_M f(x) dx$.
Symbolem $\mathcal{L}^*(M)$ značíme funkce, pro něž je integrál definován (může být nekonečný).
Symbolem $\mathcal{L}(M)$ značíme funkce, pro něž je integrál definován a navíc je konečný. V této situaci říkáme, že integrál konverguje, neboli funkce je integrovatelná.

Věta 18.3. Nechť $f, g : M \to \mathbb{R}^*$ se rovnají skoro všude v M. Potom f je měřitelná, právě když g je měřitelná, a
$$\int_M f d\lambda = \int_M g d\lambda,$$
– má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.

Zobecnění definice. Nechť f je definována skoro všude v M. Tj. $f(x) : \tilde{M} \to \mathbb{R}^*$, kde $M = \tilde{M} \cup N$, $\lambda(N) = 0$. Definujme $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ takto:
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \tilde{M}, \\ \text{libovolně (např. 0)}, & x \in N. \end{cases}$$

Funkce f se nazve měřitelná v M, je-li $\tilde{f}$ měřitelná v M; a definujeme
$$\int_M f d\lambda = \int_M \tilde{f} d\lambda\,,$$

má-li výraz vpravo smysl. (Díky předchozí větě nezávisí výsledek na dodefinování v množině N.)

Příklady. ① $f(x) = 1/x$ je měřitelná v $\mathbb{R}$ ($N = \{0\}$).
② Je-li $D(x)$ Dirichletova funkce, pak $\int_{\mathbb{R}} D d\lambda_1 = 0$. Například proto, že $D = 0$ skoro všude.

Věta 18.4. [Leviho věta.] Nechť f_n, f jsou měřitelné v M, a nechť $0 \le f_n(x) \nearrow f(x)$ s.v. v M. Potom $\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\lambda = \int_M f \, d\lambda$.

Věta 18.5. [Vlastnosti Lebesgueova integrálu.] Nechť f, $g \in \mathcal{L}^*(M)$. Potom:

1. (i) $\int_M \alpha f \, d\lambda = \alpha \int_M f \, d\lambda$;
   (ii) $\int_M (f+g) \, d\lambda = \int_M f \, d\lambda + \int_M g \, d\lambda$, má-li pravá strana smysl;
2. (i) $f \le g$ s.v. v $M \implies \int_M f \, d\lambda \le \int_M g \, d\lambda$;
   (ii) $\left| \int_M f \, d\lambda \right| \le \int_M |f| \, d\lambda$;
3. je-li f *nezáporná* s.v. v M, pak:
   (i) $\int_M f \, d\lambda < \infty \implies f < \infty$ s.v. v M;
   (ii) $\int_M f \, d\lambda = 0 \iff f = 0$ s.v. v M.

Poznámky. Vlastnosti množiny $\mathcal{L}(M)$ integrovatelných funkcí:
① $f, g \in \mathcal{L}(M) \implies \alpha f,\ f+g \in \mathcal{L}(M)$ (vektorový prostor)
② $f \in \mathcal{L}(M) \iff f$ je měřitelná a $\int_M |f| \, d\lambda < \infty$
③ f měřitelná, $|f| \le g$ s.v. v M, kde $g \in \mathcal{L}(M) \implies f \in \mathcal{L}(M)$

Poznámky. Záměna limity a integrálu, neboli rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\lambda = \int_M \big(\lim_{n\to\infty} f_n \big) \, d\lambda \qquad (*)$$

obecně neplatí. Příklad: $f_n(x)(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x)$. Potom $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, přitom $f_n(x) \to 0$ v $\mathbb{R}$, tedy vlevo je 1, vpravo 0. – Rovnost (*) platí, pokud navíc předpokládáme:
• $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v M, a $\lambda(M) < \infty$ (viz Věta 16.2.) To jsou pro praktické účely příliš silné předpoklady.
• $0 \le f_n \nearrow f$ skoro všude v M – to je Leviho věta.
• třetí případ je následující věta.

Věta 18.6. [Lebesgueova věta.] Nechť funkce f_n, f jsou měřitelné v M, $f_n(x) \to f(x)$ pro skoro všechna $x \in M$. Nechť existuje $g \in L(M)$ tak, že $|f_n(x)| \le g(x)$ skoro všude v M. Potom $\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\lambda = \int_M f \, d\lambda$.

Věta 18.7. [Leviho věta pro řady.] Nechť f_k jsou nezáporné, měřitelné v M. Potom

$$\int_M \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big) \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_M f_k \, d\lambda \Big) .$$

Příklad.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^k \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty \, .$$

Věta 18.8. [Lebesgueova věta pro řady.] Nechť f_k jsou měřitelné, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje s.v. v M. Nechť existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že $| \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \le g(x)$ pro $\forall n$, s.v. $x \in M$. Potom

$$\int_M \big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \big) \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\int_M f_k \, d\lambda \big) \, .$$

Příklad.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \, .$$

Majorantou částečných součtů je – vzhledem k teleskopičnosti sumy – první člen $f_0 = 1$.

Poznámka. Na množinách konečné míry mi jako integrovatelná majoranta může posloužit konstantní funkce. Získáváme tím variantu Lebesgueovy věty: nechť $f_n(x) \to f(x)$ s.v. v M, nechť $|f_n(x)| \le C$ pro s.v. $x \in M$, a nechť $\lambda(M) < \infty$. Potom $\int_M f_n \, d\lambda \to \int_M f \, d\lambda$.

*** Věta 18.9.** [Závislost integrálu na množině integrace.] Nechť f je měřitelná v M. Potom:

1. Jestliže $M = \bigcup_{j=1}^{N} M_j$, kde M_j jsou disjunktní, měřitelné, pak

   $$\int_M f \, d\lambda = \sum_{j=1}^{N} \int_{M_j} f \, d\lambda,$$

   má-li pravá strana smysl.

2. Nechť $f \in \mathcal{L}^*(M)$, nechť $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$, kde M_j jsou disjunktní, měřitelné. Potom

   $$\int_M f \, d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} f \, d\lambda.$$

3. Nechť $f \in \mathcal{L}^*(M)$, nechť $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$, kde M_j měřitelné a $M_j \subset M_{j+1}$. Potom

   $$\int_M f \, d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int_{M_j} f \, d\lambda.$$

Poznámky. 1 V předchozím důkazu se používá důležitý vztah:

$$\int_N f \, d\lambda = \int_M f \cdot \chi_N \, d\lambda$$

pro libovolnou měřitelnou $N \subset M$. Speciální důsledek: jestliže $N \subset M$ a $\lambda(M \setminus N) = 0$, pak $\int_N f\, d\lambda = \int_M f\, d\lambda$.
② Předpoklad $f \in \mathcal{L}^*(M)$ v bodech 2, 3 předchozí věty je podstatný - nestačilo by předpokládat „má-li pravá strana smysl".

Definice. [Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}$.] Pro libovolná $a < b \in \mathbb{R}^*$ a funkci $f : (a,b) \to \mathbb{R}^*$ klademe

$$(\mathscr{L})\int_a^b f(x)\,dx = \int_{(a,b)} f\,d\lambda_1$$

má-li pravá strana smysl. Pro $b < a$ dále klademe $(\mathscr{L})\int_a^b f(x)\,dx = -(\mathscr{L})\int_b^a$ a také $(\mathscr{L})\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Samozřejmě se nabízí otázka vztahu k Riemannovu resp. Newtonovu integrálu.

Tvrzení 1. Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$ Potom též $f \in \mathcal{L}(a,b)$ a platí

$$(\mathscr{R})\int_a^b f(x)\,dx = (\mathscr{L})\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Tvrzení 2. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$, právě když f je spojitá skoro všude v $[a,b]$, tj. $\lambda_1(\mathcal{N}) = 0$, kde $\mathcal{N}$ je množina bodů nespojitosti f v $[a,b]$.

Věta 18.10. [Výpočet Lebesgueova integrálu v $\mathbb{R}$.] Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je spojitá, kde $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť je splněn jeden z předpokladů:
1. $f(x) \geq 0$ v I
2. $\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$
Potom

$$(\mathscr{L})\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)\,,$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$.

Poznámky.
• věta jinými slovy tvrdí existenci a rovnost Lebesgueova a Newtonova integrálu (za daných předpokladů)
• předpoklad 1 nebo 2 je podstatný; lze najít (spojitou) funkci, jejíž Lebesgueův integrál neexistuje, avšak Newtonův integrál konverguje (tj. existuje a je konečný)
• předpoklad 2 se může ověřovat pomocí bodu 1 (neboť $|f| \geq 0$)

Problém. Integrály závislé na parametru – studujeme funkce tvaru

$$F(a) = \int_M f(a,x)\,dx\,.$$

Pozor: F není primitivní funkce k f. Integruje se podle $x \in M$, zajímá nás závislost na parametru $a \in I$ - zda je spojitá a zda platí

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_M f(a,x)\,dx = \int_M \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)\,dx\,.$$

Příklad.

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-|a|x} \sin(ax)\, dx.$$

Přímý výpočet dá $F(a) = 1/2a$ pro $a \neq 0$, $F(0) = 0$. Vidíme, že $F(a)$ je nespojitá, třebaže integrand závisí na a spojitě.

Značení. Je-li $f(a,x)$ funkce dvou proměnných, značí $f(a,\cdot)$ funkci druhé proměnné (tj. x), která vznikne, pokud a fixujeme. Podobně $f(\cdot,x)$ je funkcí první proměnné a při pevném x.

Věta 18.11. [Spojitá závislost integrálu na parametru.] Nechť $f(a,x) : I \times M \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, M je měřitelná množina. Předpokládáme:
(i) pro $\forall a \in I$ pevné je $f(a,\cdot)$ měřitelná v M.
(ii) pro s.v. $x \in M$ pevná je $f(\cdot,x)$ spojitá v I.
(iii) existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že $|f(a,x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in M$, pro každé $a \in I$.
Potom je funkce

$$F(a) = \int_M f(a,x)\, dx$$

konečná a spojitá v I.

Příklady. ① Funkce

$$F(a) = \int_0^{100} \frac{a^2x^2}{a^4+x^4}\, dx$$

je spojitá v $\mathbb{R}$.
② Gamma funkce

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\, dx$$

je spojitá v $(0,\infty)$.

Věta 18.12. [Derivace integrálu podle parametru.] Nechť $f(a,x) : I \times M \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, M je měřitelná množina. Předpokládáme:
(i) pro $\forall a \in I$ pevné je $f(a,\cdot)$ měřitelná v M.
(ii) pro s.v. $x \in M$ pevná je $f(\cdot,x)$ diferencovatelná v I (tj. $\exists$ konečná $\frac{\partial}{\partial a} f(a,x)$ pro $\forall a \in I$)
(iii) existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že $|\frac{\partial}{\partial a} f(a,x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in M$, pro každé $a \in I$.
(iv) existuje $a_0 \in I$ tak, že $f(a_0,\cdot) \in \mathcal{L}(M)$, (tj. $\int_M |f(a_0,x)|\, dx < \infty$.)
Potom funkce $F(a) = \int_M f(a,x)\, dx$ je konečná a

$$F'(a) = \int_M \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)\, dx$$

pro každé $a \in I$.

Příklady. ① $F(a) = \int_0^\infty e^{-bx} \frac{sin(ax)}{x}\, dx$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ pevné. Potom

$$F'(a) = \int_0^\infty e^{-bx} \cos(ax)\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

odtud pak $F(a) = \operatorname{arctg}(a/b)$.
② Pro gamma funkci platí: $\Gamma'(s) = \int_0^\infty (\ln x) x^{s-1} e^{-x}\,dx$,
$\Gamma''(s) = \int_0^\infty (\ln x)^2 x^{s-1} e^{-x}\,dx > 0$, – a tedy je ryze konvexní.

Poznámka. Ještě ke značení: je-li $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$, tak Lebesgueův integrál značíme $\int_M f\,d\lambda_n$, nebo $\int_M f(x)\,dx$, nebo $\int_M f(x)\,d\lambda_n(x)$. Závisí na tom, zda chceme zdůraznit míru, nebo proměnnou, nebo obojí. Pokud chceme vyznačit jednotlivé složky proměnné, píšeme $\int_M f(x,y)\,dxdy$, nebo $\int_M f(x,y,z)\,dxdydz$.
Význam symbolu je ale vždy tentýž. Někdy se také píše $\iint$, $\iiint$ místo $\int$, aby se zdůraznilo, že jde o dvourozměrný (třírozměrný) integrál.

Značení. Pro $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ značíme proměnnou (x,y), $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Definujeme projekci M do $\mathbb{R}^n$

$$\Pi_n M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \exists y \in \mathbb{R}^m,\ (x,y) \in M\}$$

a pro $x \in \Pi_n$ pevné definujeme řez množinou M vzhledem k y

$$M^x = \{y \in \mathbb{R}^m;\ (x,y) \in M\}\,.$$

Jestliže $f = f(x,y)$, tak $f(x,\cdot)$ značí funkci proměnné y, které vznikne fixováním x.

Věta 18.13. [Fubiniho věta.] (S použitím předchozího značení.) Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$, nechť $f(x,y) \in \mathcal{L}^*(M)$. Potom pro λ_n-skoro všechna $x \in \Pi_n M$ je $M^x \subset \mathbb{R}^m$ měřitelná množina, a $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^*(M^x)$.
Označíme-li $g(x) = \int_{M^x} f(x,\cdot) d\lambda_m$, je $g \in \mathcal{L}^*(\Pi_n)$ a platí

$$\int_M f\,d\lambda_{n+m} = \int_{\Pi_n M} g\,d\lambda_n$$

neboli (v názornějším značení)

$$\int_M f(x,y)\,dxdy = \int_{\Pi_n M} \left(\int_{M^x} f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Příklad. $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$, $f(x,y) = |x|$. Potom $\Pi_1 M = (-1,1)$, $M^x = (-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$, tedy

$$\int_M |x|\,dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |x|\,dy \right) dx = \frac{4}{3}\,.$$

Poznámky. Mechanické použití Fubiniho věty v případě, že $f \notin \mathcal{L}^*(M)$, tj. původní vícenásobný integrál neexistuje, vede k nesmyslným výsledkům:
$M = (0,\infty) \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x+1 \\ -1, & y < x < y+1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Potom $\int_M f(x,y)\,dxdy$ neexistuje (integrál kladné i záporné části je $+\infty$), avšak

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x,y)\,dy \right\} dx = +\frac{1}{2}\,,$$

zatímco

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x,y)\,dx \right\} dy = -\frac{1}{2}\,.$$

• předpoklad $f \in \mathcal{L}^*(M)$ je určitě splněn, pokud f je měřitelná a buď $f \geq 0$, nebo $\int_M |f| d\lambda < \infty$. (Druhý předpoklad můžeme ověřit pomocí Fubiniho věty, neboť $|f| \geq 0$).
• speciálně, výpočet objemu $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ pomocí Fubiniho věty:

$$\lambda_{n+m}(M) = \int_M 1\,d\lambda_{n+m} = \int_{\Pi_n M} \left\{ \int_{M^x} 1\,d\lambda_m \right\} d\lambda_n = \int_{\Pi_n M} \lambda_m(M^x)\,d\lambda_n$$

Příklad. Použití Fubiniho věty k výpočtu původně jednorozměrného integrálu:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx\,.$$

Integrovaná funkce je přírustek, tj. integrál derivace

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b x^y\,dy\,.$$

Dvojím užitím Fubiniho věty na $M = (0,1) \times (a,b)$, $f = x^y > 0$ máme

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy \right) dx = \int_M x^y\,dxdy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\,dx \right) dy = \ln \frac{b+1}{a+1}\,.$$

Opakování. Věta o substituci pro Newtonův integrál:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(y)) \cdot |\varphi'(y)|\,dy$$

kde $\varphi(y) : (\alpha, \beta) \to (a,b)$ je vzájemně jednoznačná, a $\varphi'(x) \neq 0$.

Definice. Pro $\varphi(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definujeme Jakobián

$$J\varphi(y) = \det \nabla\varphi(y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(y)}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Definice. Nechť Ω, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny. Zobrazení $\varphi(y) : \Omega \to M$ se nazve difeomorfismus, jestliže:

1. $\varphi(y)$ je vzájemně jednoznačné,
2. $\varphi(y)$ je C^1 (tj. všechny parciální derivace řádu 1 jsou spojité),
3. $J\varphi(y) \neq 0$ pro $\forall y \in \Omega$.

*** Věta 18.14.** [Věta o substituci.] Nechť Ω, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny, $\varphi(y) : \Omega \to M$ je difeomorfismus a $f(x) : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ měřitelná funkce. Potom

$$\int_M f(x)\,dx = \int_\Omega f(\varphi(y))|J\varphi(y)|\,dy\,,$$

neboli

$$\int_M f\,d\lambda_n = \int_\Omega (f \circ \varphi)|J\varphi|\,d\lambda_n\,,$$

má-li jedna strana smysl.

Poznámka. Praktický význam věty o substituci pro vícerozměrné integrály je v tom, že získám příjemnější (z hlediska Fubiniho věty) tvar množiny, přes kterou integruji.

Příklad. Plocha množiny M, ohraničené přímkami: $x+y=1$, $x+y=2$, $y=3x$, $y=4x$. Substituce: $u = x+y$, $v = y/x$, neboli toto je zobrazení $\varphi^{-1} : M \to \Omega$, kde $\Omega = (1,2)\times(3,4)$. $\varphi : \Omega \to M$ má tvar $x = u/(1+v)$, $y = uv/(1+v)$, jakobián $J\varphi = u/(1+v)^2$. Tedy

$$\lambda_2(M) = \int_M 1\,dxdy = \int_\Omega \frac{u}{(1+v)^2}\,dudv = \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{u}{(1+v)^2}\,dv\right) du = \frac{3}{40}\,.$$

Polární souřadnice. Substituce $x = r\cos u$, $y = r\sin u$, tj. $\varphi : (r,u) \mapsto (x,y)$ je difeomorfismus z $\Omega = (0,\infty)\times(0,2\pi)$ do $\mathbb{R}^2 \setminus N$, kde $N = \{(x,y);\ x \geq 0,\ y = 0\}$. (To, že obrazem není celé $\mathbb{R}^2$, nevadí, neboť chybějící množina N má dvourozměrnou míru 0.) Jakobián je r.

Sférické souřadnice. Substituce $x = r\cos u\cos v$, $y = r\sin u\cos v$, $z = r\sin v$. Zobrazení $\varphi : \langle r,u,v\rangle \mapsto \langle x,y,z\rangle$ je difeomorfismus z $\Omega = (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)$ do $\mathbb{R}^3 \setminus N$, kde N je polorovina $y=0$, $x \geq 0$, tj. opět množina míry nula. Jakobián je $r^2\cos v$.
Názorně: u...zeměpisná délka, v...zeměpisná šířka (póly leží na ose z.)

19. Křivkový integrál.

Značení. Tučným fontem značíme vektory $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, $\mathbf{0} = (0,\dots,0)$. Norma vektoru $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$, skalární součin $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$.

Definice. Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazve jednoduchá křivka, jestliže existuje $\boldsymbol{\varphi}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\gamma = \boldsymbol{\varphi}([a,b]) = \big\{\boldsymbol{\varphi}(t);\ t \in [a,b]\big\}\,,$$

s těmito vlastnostmi:
(i) $\boldsymbol{\varphi}(t)$ je spojité a prosté v $[a,b]$
(ii) $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ je spojité v (a,b) a $\boldsymbol{\varphi}'(t) \neq \mathbf{0}$ pro $\forall t \in (a,b)$

Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá jednoduchá uzavřená křivka, jestliže místo (i) požadujeme (i') $\boldsymbol{\varphi}$ je spojité v $[a,b]$, prosté v $[a,b)$ a $\boldsymbol{\varphi}(a)=\boldsymbol{\varphi}(b)$.

Terminologie: Dvojice $(\boldsymbol{\varphi},[a,b])$ se nazývá parametrizace křivky. Alternativní terminologie (kterou my nepoužíváme) nazývá dvojici $(\boldsymbol{\varphi},[a,b])$ křivkou, a γ je „geometrický obraz křivky". V případě neuzavřené křivky se $\boldsymbol{\varphi}(a)$, $\boldsymbol{\varphi}(b)$ nazývají krajní body.

Příklady. 1 $\gamma=\{(x^2+y^2)^{3/2}=2xy,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$, polární parametrizace $\boldsymbol{\varphi}(t)=(\sin(2t)\cos(t),\sin(2t)\sin(t))$, $t\in[0,\pi/2]$.
2. Graf C^1 funkce $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ je křivka v R^2, parametrizace $\boldsymbol{\varphi}(t)=(t,f(t))$, $t\in[a,b]$.

Definice. Množina $\gamma\subset\mathbb{R}^n$ se nazývá zobecněná křivka, jestliže existují jednoduché křivky γ_j, $j=1,\ldots,m$ tak, že
(i) $\gamma=\bigcup_{j=1}^m\gamma_j$,
(ii) po vynechání krajních bodů jsou γ_j vzájemně disjunktní.

Terminologie: $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$ nazýváme přípustný rozklad křivky γ (není určen jednoznačně.)

Definice. [Integrál 1. druhu] Nechť $\gamma\subset\mathbb{R}^n$ je křivka a $f(x):\gamma\to\mathbb{R}$ daná funkce. Integrál prvního druhu funkce f přes křivku γ značíme $\int_\gamma f\,ds$ a je definován takto:
1. Je-li γ jednoduchá křivka, pak

$$\int_\gamma f\,ds=\int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t))\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|\,dt\,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi},[a,b])$ je libovolná parametrizace γ.
2. Je-li γ zobecněná křivka, potom

$$\int_\gamma f\,ds=\sum_{j=1}^m\int_{\gamma_j}f\,ds\,,$$

kde $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$ je libovolný přípustný rozklad γ.
3. Konečně, délku (zobecněné) křivky γ definujeme a značíme jako

$$\ell(\gamma)=\int_\gamma 1\,ds\,.$$

Lemma 19.1. [O reparametrizaci.] Nechť γ je jednoduchá (neuzavřená) křivka. Nechť $(\boldsymbol{\varphi},[a,b])$, $(\boldsymbol{\psi},[c,d])$ jsou dvě různé její parametrizace.
Potom existuje vzájemně jednoznačná funkce $\omega(\tau):[c,d]\to[a,b]$; přičemž $\omega(\tau)$ je spojitá v $[c,d]$, $\omega'(\tau)$ je konečná a nenulová v (c,d) a

$$\boldsymbol{\varphi}(\omega(\tau))=\boldsymbol{\psi}(\tau)\qquad\forall\tau\in[c,d]\,.$$

Opakování. [Věta o substituci v $\mathbb{R}$.] Nechť $\omega(\tau):(c,d)\to(a,b)$ je vzájemně jednoznačná funkce, přičemž $\omega'(\tau)$ je konečná a nenulová v (c,d). Potom

$$\int_a^b g(t)\,dt=\int_c^d g(\omega(\tau))|\omega'(\tau)|\,d\tau\,.$$

Věta 19.1.[2] Integrál prvního druhu nezávisí na parametrizaci, ani zvoleném rozkladu křivky.

Definice. [Orientace křivky.] Jednoduchá křivka je orientovaná, je-li určen směr probíhání. (U neuzavřené křivky to znamená určit počáteční a koncový bod (p.b., k.b.)
Zobecněnou křivku orientujeme tak, že zvolíme nějaký přípustný rozklad, a orientujeme jeho jednotlivé elementy (tzv. orientovaný rozklad.)

Poznámky.
• parametrizace přirozeně vyjadřuje orientaci: směr probíhání $\boldsymbol{\varphi}(t)$ pro t rostoucí. Říkáme, že parametrizace je/není ve shodě s orientací křivky.
• jednoduchá křivka připouští jen dvě různé orientace. U zobecněné křivky je jich více - přípustný rozklad s m prvky umožňuje 2^m různých orientací.

Příklad. Nechť $\gamma = \{x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0\}$, orientovaná proti směru hodinových ručiček. Dvě různé parametrizace: $\boldsymbol{\varphi}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1,1]$ a $\boldsymbol{\psi}(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau)$, $\tau \in [0,\pi]$. Druhá je ve shodě s orientací křivky. (Pozn. k Lemmatu 19.1: $\omega(\tau) = \cos\tau$.)

Dodatek k L.19.1 $\omega'(\tau) > 0$ (resp. $\omega'(\tau) < 0$) pro každé $\tau \in (c,d)$, právě když $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ určují stejnou (resp. opačnou) orientaci.

Definice. [Integrál 2. druhu.] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná křivka, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \gamma \to \mathbb{R}^n$ daná (vektorová) funkce. Integrál 2. druhu funkce $\boldsymbol{F}$ po křivce γ značíme $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}$ a je definován takto:
1. Je-li γ jednoduchá, pak

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t)\, dt\,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}, [a,b])$ je libovolná parametrizace γ, která je ve shodě s orientací.
2. Je-li γ zobecněná křivka, potom

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}\,,$$

kde $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$ je příslušný orientovaný rozklad γ.
Varianta značení: $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = F_1 dx + F_2 dy (+F_3 dz)$.

Věta 19.2. Integrál 2. druhu nezávisí na parametrizaci, je-li ve shodě s orientací. Není-li, vyjde s opačným znaménkem.

Definice. Řekneme, že (orientovaná zobecněná) křivka γ spojuje body $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ („ jde od $\boldsymbol{x}_0$ do $\boldsymbol{x}_1$”), jestliže γ je určena orientovaným rozkladem $\{\gamma_i\}_{j=1}^m$, kde

(i) p.b. $\gamma_1 = \boldsymbol{x}_0$

(ii) k.b. $\gamma_j =$ p.b. γ_{j+1}, $j = 1, \ldots, m-1$

[2] Důkaz pro jednoduchou křivku.

(iii) k.b. $\gamma_m = \boldsymbol{x}_1$

Speciální případ: γ jednoduchá, orientovaná, p.b. $\gamma = \boldsymbol{x}_0$, k.b. $\gamma = \boldsymbol{x}_1$.
Pokud $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_1$ (tento případ nevylučujeme), jde o (zobecněnou) uzavřenou křivku.
Jestliže (zobecněné) orientované křivky γ, respektive ψ spojují body $\boldsymbol{x}_0$ a $\boldsymbol{x}_1$ respektive $\boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_2$, definujeme $\chi = \gamma \oplus \psi$ jako zobecněnou orientovanou křivku, vzniklou „formálním zřetězením“ γ a ψ. Zřejmě χ spojuje body $\boldsymbol{x}_0$ a $\boldsymbol{x}_2$.
Konečně, je-li γ (zobecněná), orientovaná křivka, spojující body $\boldsymbol{x}_0$ a $\boldsymbol{x}_1$, definujeme $\chi = \ominus\gamma$ jako tutéž křivku, ale s opačnou orientací (tj. spojující $\boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_0$).

Věta 19.3. [Základní vlastnosti křivkového integrálu.] Nechť γ je (zobecněná, orientovaná) křivka, nechť f, g resp. $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ jsou skalární (resp. vektorové) funkce na γ. Nechť ψ je (zobecněná, orientovaná) křivka t.ž. k.b.γ = p.b.ψ, nechť f a $\boldsymbol{F}$ jsou definovány též na ψ. Potom pro integrál prvního druhu platí:

P1. $\int_\gamma (f+g)\,ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\gamma g\,ds$, $\int_\gamma \alpha f\,ds = \alpha \int_\gamma f\,ds$.

P2. $\int_{\gamma\oplus\psi} f\,ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\psi f\,ds$.

P3. $\left|\int_\gamma f\,ds\right| \le M_1\ell(\gamma)$, kde $M_1 = \sup\{|f(\boldsymbol{x})|;\ \boldsymbol{x}\in\gamma\}$.

Pro integrál druhého druhu platí:

D1. $\int_\gamma (\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{ds} = \int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds} + \int_\gamma \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{ds}$, $\int_\gamma \alpha\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds} = \alpha\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds}$.

D2. $\int_{\gamma\oplus\psi} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds} = \int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds} + \int_\psi \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds}$.

D3. $\left|\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds}\right| \le M_2\ell(\gamma)$, kde $M_2 = \sup\{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\|;\ \boldsymbol{x}\in\gamma\}$.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazve *křivkově souvislá*, jestliže pro libovolné $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in M$ existuje křivka γ spojující $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$ taková, že $\gamma \subset M$.
Otevřená, křivkově souvislá množina se nazývá *oblast*.

Příklady. ① konvexní množina je křivkově souvislá
② $\mathbb{R}^2$ s vynechanou polopřímkou je nekonvexní, křivkově souvislá množina
③ $\mathbb{R}^2$ s vynechanou přímkou není křivkově souvislá

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorová funkce. Funkce $U(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazve potenciál $\boldsymbol{F}$ v Ω, jestliže $U \in C^1(\Omega)$, a $\nabla U = \boldsymbol{F}$ v Ω, tj. $\frac{\partial}{\partial x_i}U(\boldsymbol{x}) = F_i(\boldsymbol{x})$ pro $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$.

Lemma 19.2. [O integrálu potenciálního pole.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ daná vektorová funkce. Nechť $U(\boldsymbol{x})$ je potenciál $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ v Ω.
Potom pro libovolnou křivku $\gamma \subset \Omega$, jdoucí od $\boldsymbol{x}_0$ do $\boldsymbol{x}_1$, platí

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds} = U(\boldsymbol{x}_1) - U(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ daná vektorová funkce. Řekneme, že integrál z $\boldsymbol{F}$ nezávisí v Ω na cestě, jestliže pro libovolné body $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ v Ω a pro libovolné křivky γ, ψ jdoucí od $\boldsymbol{x}_0$ do $\boldsymbol{x}_1$ platí:

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_\psi \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}\,.$$

Pozorování. Integrál z $\boldsymbol{F}$ nezávisí v Ω na cestě, právě když $\int_\omega \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = 0$ pro každou (zobecněnou), zavřenou křivku ω v Ω.

Věta 19.4. [O existenci potenciálu.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá vektorová funkce. Potom je ekvivalentní:

(1) $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál

(2) integrál z $\boldsymbol{F}$ nezávisí v Ω na cestě

Definice. Tečný vektor křivky $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ v bodě $\boldsymbol{x}$ definujeme

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) := \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|}\,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}(t), [a, b])$ je libovolná parametrizace γ, a $t \in [a, b]$ je zvoleno tak, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$.

Poznámka. $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ nezávisí (až na znaménko) na zvolené parametrizaci. Není definován v krajních bodech (spojovacích bodech zobecněné křivky).
Ekvivalentně můžeme psát

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varphi}(t)) = \pm\frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\|}\,,$$

znaménko + platí, pokud $\boldsymbol{\varphi}$ je ve shodě s orientací γ, a $\boldsymbol{T}$ chceme též ve směru orientace.

Věta 19.5. [Vztah integrálů 1. a 2. druhu.] Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná křivka, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) : \gamma \to \mathbb{R}^n$. Potom

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_\gamma \big(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\big)\, ds\,,$$

kde $\boldsymbol{T}$ je tečný vektor ke γ, volený ve shodě s orientací.

Poznámka. Levá strana je integrál 2. druhu; pravá strana integrál 1. druhu (ze skalární funkce $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$.)

Poznámka. [Význam křivkových integrálů.]
1 $\int_\gamma 1\, ds$ má význam délky křivky.
2 je-li $\boldsymbol{F}$ pole (gravitační, elektrické), vyjadřuje $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ sílu, kterou překonává částice (jednotkové hmotnosti, náboje) pohybem po křivce, tedy $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}$ je (až na znaménko a patřičnou konstantu) práce, kterou pohybem po křivce vykonáme

③ Lemma 19.2 lze zapsat jako

$$\int_\gamma \nabla U \cdot \boldsymbol{ds} = U(\text{k.b. } \gamma) - U(\text{p.b. } \gamma)\,;$$

jde o variantu tvrzení “integrál derivace je přírustek funkce”.

Poznámky.
• Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, značí $\overline{\Omega}$ uzávěr a platí $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, kde $\partial\Omega$ je hranice.
• zdánlivě samozřejmý vzoreček

$$\int_a^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a)\,,$$

nemusí platit, předpokládáme-li pouze g spojitá v $[a, b]$, g' je konečná a spojitá v (a, b). Integrál vlevo totiž dle úmluvy chápeme vždy jako Lebesgueův, a g' nemusí být za výše uvedených předpokladů Lebesgueovsky integrovatelná.
Vzoreček platí, pokud g' je nejen spojitá v (a, b), ale má navíc spojité rozšíření do krajních bodů. To motivuje následující definici.

Definice. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, říkáme, že f je C^1 v $\overline{\Omega}$, jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existují a jsou spojité v Ω, a navíc mají spojité rozšíření do $\overline{\Omega}$.

Poznámka. Ve zbytku kapitoly se omezíme na situaci v $\mathbb{R}^2$. Některá zobecnění do vyšších dimenzí uvedeme v přístí kapitole; nejsou přímočará.

Definice. Je-li γ křivka v $\mathbb{R}^2$, normálovým vektorem $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ v bodě $\boldsymbol{x} \in \gamma$ rozumíme jednotkový vektor, kolmý na tečný vektor $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$. (Není definován tam, kde není definován $\boldsymbol{T}$; je určen až na znaménko.)

Poznámka. Je-li (α, β) vektor v $\mathbb{R}^2$, pak $(-\beta, \alpha)$ vznikne otočením o $\pi/2$ proti směru hodinových ručiček, zatímco $(\beta, -\alpha)$ vznikne otočením o $\pi/2$ ve směru hodinových ručiček. Konvence: „v kladném smyslu“ znamená „proti směru hodinových ručiček“.

Definice. Divergence resp. rotace pole $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se definuje jako

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\,, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,.$$

Věta 19.6.[3] [Gaussova v $\mathbb{R}^2$.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ,,rozumná” oblast, $\boldsymbol{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ je C^1 dokonce na jistém okolí $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná křivka. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\,dxdy = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,ds\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normála k $\partial\Omega$, směřující ven z Ω (vnější normála.)

[3] Důkaz pro oblast pod grafem C^1 funkce.

Věta 19.7. [Greenova.] Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ,,rozumná" oblast, $\boldsymbol{G} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ je C^1. Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná křivka, orientovaná tak, že obíhá kolem Ω v kladném smyslu. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{rot} \boldsymbol{G} \, dxdy = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{ds} \, .$$

Poznámky. Operátor rotace úzce souvisí s otázkou existence potenciálu v $\mathbb{R}^2$.
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1, a $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál. Potom $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ v Ω.
Máme i obrácené tvrzení, tj. podmínka $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ (v praxi lehce ověřitelná) implikuje existenci potenciálu. Neobejde se však bez dodatečné podmínky na Ω.

Definice. Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá, má-li následující vlastnost: je-li $\gamma \subset \Omega$ uzavřená (zobecněná) křivka, tak množiny, které γ ohraničuje, leží též v Ω.
Ekvivalentně: γ lze spojitě stáhnout do bodu, aniž opustíme Ω.

Příklady. ① $B = \{x^2 + y^2 < 1\}$ je jednoduše souvislá.
② $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B$ je souvislá, ale ne jednoduše.
③ konvexní množina je vždy jednoduše souvislá; $\mathbb{R}^2$ s vynechanou polopřímkou je nekonvexní, jednoduše souvislá množina.

Věta 19.8. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1, a $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ v Ω. Potom $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál.

Poznámka. Předpoklad jednoduché souvislosti nelze vynechat:

$$\boldsymbol{F} = (\tfrac{-y}{x^2+y^2}, \tfrac{x}{x^2+y^2})$$

je C^1 v $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, splňuje zde $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$, přesto nemá v Ω potenciál. Sporem - nechť $\boldsymbol{F} = \nabla U$, potom díky Lemmatu 19.2. je integrál z $\boldsymbol{F}$ po každé uzavřené křivce roven nule. Ovšem snadno spočítáme, že integrál po kružnici obíhající počátek je nenulový.
Na každé jednoduše souvislé podmnožině $\hat{\Omega} \subset \Omega$ potenciál ovšem existuje; např. pro $\hat{\Omega} = \{x > 0\}$ máme $U = \operatorname{arctg}(y/x)$.

20. Plošný integrál.

Definice. Množina $P \subset \mathbb{R}^3$ se nazve jednoduchá plocha, pokud $P = \boldsymbol{\varphi}(M)$, kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast, a zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ splňuje:
(i) $\boldsymbol{\varphi}$ je C^1, prosté v M
(ii) $h(\nabla\boldsymbol{\varphi}) = 2$ všude v M
(iii) $\boldsymbol{\varphi}_{-1} : P \to M$ je spojité
Dvojice $(\boldsymbol{\varphi}, M)$ se nazývá parametrizace plochy P.

Komentář. $h(\nabla\boldsymbol{\varphi})$ značí hodnost matice $\nabla\boldsymbol{\varphi}$, tj. bod (ii) $\implies$ plocha nedegeneruje (má dimenzi 2). Bod (iii) vylučuje situaci, kdy kraj se dotýká vnitřku plochy.

Příklady. ① Graf C^1 funkce $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je plocha, $\boldsymbol{\varphi} = (u, v, f(u, v))$, $(u, v) \in M$.
② Sférické souřadnice $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$, kde $(u, v) \in M = (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ parametrizují jednotkovou sféru s výjimkou jednoho „poledníku“

Definice. [Vnější součin v $\mathbb{R}^3$.] Pro $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektory v $\mathbb{R}^3$ definuji $u \times v$ jako vektor $(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.
Vlastnosti:
• $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}$, $(a\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (a\boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ (bilinearita)
• $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$ (antisymetrie)
Geometrický význam:
• $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou lineárně závislé, právě když $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = 0$
• jsou-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ lineárně nezávislé, je $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ (jednoznačně určený) vektor s těmito vlastnostmi:
(1) $\boldsymbol{w}$ je kolmý na rovinu, určenou vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$
(2) délka $\boldsymbol{w}$ je rovna ploše rovnoběžníku, určeného vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$
(3) vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ (v tomto pořadí) tvoří kladně orientovanou bázi, tj. determinant matice se sloupci $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ je kladný.
• pro $\forall \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ platí: $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \det[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, kde $[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ je matice se sloupci $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ (v tomto pořadí.)

Definice. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha, $f : P \to \mathbb{R}$. Plošný integrál 1. druhu funkce f přes plochu P definujeme jako

$$\int_P f\, dS = \int_M \big(f \circ \boldsymbol{\varphi}\big) \, \|\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}\| \, du dv \,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}, M)$ je libovolná parametrizace P.

Poznámka. Geometrický význam: $\int_P 1\, dS$ je obsah (dvourozměrná míra) plochy.

Definice. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha, $\boldsymbol{x} \in P$, a $(\boldsymbol{\varphi}, M)$ je libovolná parametrizace P. Definujeme tečný prostor (podrobněji: tečný prostor plochy P v bodě $\boldsymbol{x}$)

$$T_{\boldsymbol{x}} = \mathrm{Lin}\left\{\partial_u \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}_{-1}(\boldsymbol{x})), \partial_v \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}_{-1}(\boldsymbol{x}))\right\},$$

a normálu (podrobněji: normálový vektor plochy v bodě $\boldsymbol{x}$)

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \pm \left(\frac{\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}}{\|\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}\|} \right) (\boldsymbol{\varphi}_{-1}(\boldsymbol{x}))$$

Zjevně $\|\boldsymbol{n}\| = 1$, $\boldsymbol{n}(x) \perp T_x$.

Definice. Orientovat jednoduchou plochu značí určit preferovanou stranu, neboli rozlišit „rub“ a „líc“.

Poznámky. Parametrizace vyjadřuje orientaci – strana plochy, na kterou ukazuje vektor $\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}$. Parametrizace je/není ve shodě s orientací plochy.
Normála je určena až na znaménko. Pokud volíme normálu ve shodě s orientací, a parametrizace $\boldsymbol{\varphi}$ je také ve shodě s orientací, platí

$$\boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}}{\|\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}\|}\,, \qquad \text{neboli} \quad \partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{\varphi} \cdot \|\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}\|$$

Definice. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha, $\boldsymbol{F} : P \to \mathbb{R}^3$. Plošný integrál 2. druhu funkce $\boldsymbol{F}$ přes plochu P definujeme jako

$$\int_P \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \int_M \big(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\varphi}\big) \cdot \big(\partial_u \boldsymbol{\varphi} \times \partial_v \boldsymbol{\varphi}\big)\, dudv\,,$$

kde $(\boldsymbol{\varphi}, M)$ je libovolná parametrizace ve shodě s orientací P.
Integrand se dá zapsat také jako

$$\det \big[\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\varphi}, \partial_u \boldsymbol{\varphi}, \partial_v \boldsymbol{\varphi}\big]\,.$$

V tradičním značení píšeme $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy$.

Definice. Množina $P \subset \mathbb{R}^3$ se nazve zobecněná plocha, jestliže

$$P = \sum_{j=1}^{m} P_j \cup \Gamma\,, \tag{$\mathcal{R}$}$$

kde P_j jsou jednoduché plochy, splňující $P_j \cap \overline{P_{j'}} = \emptyset$ pro $\forall\ j \neq j'$, Γ je konečné sjednocení jednoduchých křivek.
Sjednocení $(\mathcal{R})$ se nazývá *přípustný rozklad* plochy P; není určen jednoznačně.

Poznámky. Platí $\overline{P_j} = P_j \cup \beta$, kde β je „okraj“ plochy. Podmínka $P_j \cap \overline{P_{j'}} = \emptyset$ tedy říká, že P_j je nejen disjunktní s $P_{j'}$, ale i s jejím okrajem.

Příklady. ① Sféra $S_2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ je zobecněná plocha; $S_2 = P_1 \cup P_2 \cup \Gamma$, kde P_i jsou polokoule – grafy $f = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\{x^2 + y^2 < 1\}$, Γ je rovník $\{z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$.
② plášť (hranice) krychle $P = \partial[0,1]^3$ je zobecněná plocha, s přípustným rozkladem

$$P = \bigcup_{j=1}^{6} P_j \cup \bigcup_{k=1}^{12} \gamma_k\,,$$

P_j jsou stěny, γ_k hrany.

Definice. Zobecněná plocha je orientovaná, pokud je pevně zvolen přípustný rozklad, a jeho elementy P_j jsou orientované (tzv. orientovaný rozklad.)

Definice. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je zobecněná plocha, $(\mathcal{R})$ je přípustný (orientovaný) rozklad, $f : P \to \mathbb{R}$ resp. $\boldsymbol{F} : P \to \mathbb{R}^3$ dané funkce. Potom definujeme

$$\int_P f\, dS = \sum_{j=1}^{m} \int_{P_j} f\, dS\,, \qquad \int_P \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \sum_{j=1}^{m} \int_{P_j} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS}\,.$$

Definice. Pro $\boldsymbol{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definujeme divergenci

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\,.$$

Věta 20.1.[4] [Gaussova pro $\mathbb{R}^3$]. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je ,,rozumná" oblast, $\boldsymbol{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ je C^1 dokonce na jistém okolí $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná plocha. Potom

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, dxdydz = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normála k $\partial\Omega$, směřující ven z Ω (vnější normála.)

Věta 20.2. [Vztah integrálu 1. a 2. druhu.] Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá, orientovaná plocha, $\boldsymbol{F} : P \to \mathbb{R}^3$. Potom

$$\int_P \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \int_P (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) \, dS \,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normála k P, volená ve shodě s orientací.

Poznámky. Levá strana je integrál 2. druhu, pravá strana je integrál 1. druhu ze skalární funkce $f = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$. Srovnej Větu 19.5. Gaussovu větu lze tedy přeformulovat:

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, dxdydz = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS}$$

přičemž $\partial\Omega$ je orientována ven z Ω.

Vzorečky. ① Pro α, $\beta \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}\|^2 = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} .$$

② Nechť $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^3$ a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ splňují $[\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\delta}] \, A$ (kde $[\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\beta}]$ značí matici se sloupci $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$.) Potom $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \big(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\delta}\big) \det A$.

Věta 20.3. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha, $f : P \to \mathbb{R}$, $(\boldsymbol{\varphi}, M)$ libovolná parametrizace. Potom

$$\int_P f \, dS = \int_M f \circ \boldsymbol{\varphi} \sqrt{g} \, dudv \,,$$

kde

$$g = \det \begin{pmatrix} \partial_u \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial_u \boldsymbol{\varphi} & \partial_u \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial_v \boldsymbol{\varphi} \\ \partial_u \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial_v \boldsymbol{\varphi} & \partial_v \boldsymbol{\varphi} \cdot \partial_v \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}$$

je tzv. Grammův determinant.

Příklad. Válcové souřadnice $x = \rho \cos u$, $y = \rho \sin u$, $z = v$, $(u, v) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ (pozor: $\rho > 0$ je konstanta). Pak je $\sqrt{g} = \rho$.

* **Lemma 20.1.** [O reparametrizaci plochy.] Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduchá plocha, $(\boldsymbol{\varphi}, M)$, $(\boldsymbol{\psi}, O)$ její parametrizace. Potom existuje difeomorfismus $\omega : O \to M$ takový, že $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi} \circ \omega$.

[4] Důkaz pro oblast pod grafem C^1 funkce.

Navíc: $J\omega > 0$ (resp. $J\omega < 0$) všude v O, právě když $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ vyjadřují stejnou (resp. opačnou) orientaci.

Důsledky. Tečný prostor nezávisí na zvolené parametrizaci. Normálový vektor (až na znaménko) též ne.

Věta 20.4. Integrál 1. druhu nezávisí na parametrizaci. Integrál 2. druhu také ne – až na znaménko v případě neshody parametrizace s orientací.

Definice. $P \subset \mathbb{R}^3$ se nazve plocha s okrajem, pokud existuje parametrizace $(\boldsymbol{\varphi}, M)$ s těmito vlastnostmi:
(i) $\boldsymbol{\varphi}$ je prostá, C^1 a $h(\nabla\boldsymbol{\varphi}) = 2$ dokonce na nějaké množině striktně větší než $\overline{M}$
(ii) ∂M je jednoduchá, uzavřená křivka.
Množina $\Gamma = \boldsymbol{\varphi}(\partial M)$ se nazývá okraj plochy.

Poznámka. Odsud nutně vyplývá, že Γ je též jednoduchá uzavřená křivka. Navíc: je-li $(\chi, [a, b])$ parametrizace ∂M, je $(\boldsymbol{\varphi} \circ \chi, [a, b])$ parametrizace Γ.

Definice. Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je orientovaná plocha s okrajem. Nechť křivka Γ (= okraj P) je orientovaná. Řekneme, že Γ obíhá P v kladném smyslu, jestliže (názorně řečeno): jdeme-li po okraji ve směru probíhání Γ, hlavou ve směru orientace P, máme plochu po levé ruce.

Definice. Pro $\boldsymbol{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definujeme rotaci

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big)$$

*** Věta 20.5.** [Stokesova v $\mathbb{R}^3$.] Nechť $P \subset \mathbb{R}^3$ je plocha s okrajem Γ, nechť Γ obíhá P v kladném smyslu. Nechť $\boldsymbol{F} \in C^1(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O}$ je otevřená množina obsahující $P \cup \Gamma$. Potom

$$\int_P \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} = \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds}\,.$$

Definice. Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazve jednoduše souvislá, jestliže každou uzavřenou křivku $\gamma \subset \Omega$ lze stáhnout do bodu, aniž opustíme Ω.
Poznámka. Pro $n = 2$ to názorně znamená: je-li $\gamma \subset \Omega$ uzavřená křivka, tak „vnitřek“ γ leží celý v Ω.
Pro $n = 3$ to značí: je-li $\gamma \subset \Omega$ (zobecněná) uzavřená křivka, pak existuje (zobecněná) plocha $P \subset \Omega$ taková, že γ je okraj P.

Příklady. (Pro $\mathbb{R}^3$.) Označ $B(0, r) = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$.
① Kulová vrstva $\Omega = B(0, R) \setminus B(0, r)$, kde $R > r$ je jednoduše souvislá.
② Koule bez válce $\Omega = B(0, R) \setminus \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 < r^2\}$, kde $R > r$, není jednoduše souvislá.

Pozorování. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je oblast, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ je C^1 a má v Ω potenciál. Potom $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ v Ω.

Věta 20.6. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je jednoduše souvislá oblast, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ je C^1, a $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ v Ω. Potom $\boldsymbol{F}$ má v Ω potenciál.

Poznámka. Srovnej Větu 19.8 v minulé kapitole.

Dodatky.

Tvrzení. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ spojitá, $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ je C^1. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

1. $h(x) = \operatorname{div} \boldsymbol{F}(x)$, pro $\forall x \in \Omega$
2. $\int_V h\, dx = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS}$ pro každou „rozumnou“ množinu $V \subset \Omega$
3. $h(x) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS}$ pro $\forall x \in \Omega$, kde $B_r(x)$ je koule o středu x, poloměru r a $|B_r(x)|$ její objem

Lemma D.1. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ spojitá.

(i) Je-li $\int_V f(x)\, dx$ pro každou „rozumnou“ $V \subset \Omega$, je už nutně $f(x) = 0$ pro $\forall x \in \Omega$.

(ii) Pro každé $x \in \Omega$ pevné je

$$f(x) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(u)\, du\,,$$

kde $B_r(x)$ je koule o středu x, poloměru r a $|B_r(x)|$ její objem.