Rovnice vedení tepla.

Řešíme rovnici $\partial_t u - \Delta u = 0$ pro neznámou funkci $u = u(x,t)$, kde $t > 0$ a $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$. Počáteční podmínka je $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$.

1. $\Omega = \mathbb{R}$, počáteční podmínka $u_0(x) = \exp(-cx^2)$, $c > 0$.

   [Použijte Fourierovu transformaci přes x. Výsledek:

$$\frac{1}{\sqrt{4ct+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t+1/c}\right).$$

2. $\Omega = (0,1)$, počáteční podmínka $u_0(x) = 1 - x$, $x \in (0,1)$, okrajové podmínky $\partial_x u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$.

   [Počáteční podmínku rozšiřte liše v $x = 1$, sudě kolem počátku a dále 4-periodicky. Hledejte řešení ve tvaru Fourierovy řady s časově proměnnými koeficienty. Výsledek:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 8 \frac{\cos(1/2\ (2\,k+1)\,\pi\,x) e^{-1/4\,(2\,k+1)^2 \pi^2 t}}{(2\,k+1)^2\,\pi^2}$$

3. $\Omega = (0,\pi)$, počáteční podmínka $u_0(x) = 1$ pro $x \in (0,\pi)$, okrajová podmínka $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

   [Počáteční podmínku rozšiřte liše v $x = \pi$ a v počátku, dále 2π-periodicky. Hledejte řešení ve tvaru Fourierovy řady s časově proměnnými koeficienty. Výsledek:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4 \frac{\sin((2\,k+1)\,x) e^{-(2\,k+1)^2 t}}{(2\,k+1)\,\pi}$$

4. $\Omega = (0,\pi)$, počáteční podmínka $u_0(x) = \exp(ax)$, okrajové podmínky $\partial_x u(0,t) = \partial_x u(\pi,t) = 0$.

   [Počáteční podmínku rozšiřte sudě a 2π-periodicky. Hledejte řešení ve tvaru Fourierovy řady s časově proměnnými koeficienty. Výsledek:

$$\frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\left((-1)^k e^{\pi} - 1\right) \cos(kx) e^{-k^2 t}}{(1+k^2)\,\pi}$$

5. $\partial_t u - k\Delta u = 0$ (k je koeficient tepelné vodivosti) $\Omega = (0, \infty)$, okrajová podmínka $u(x = 0, t) = f(t)$ je daná T-periodická funkce (okrajovou podmínku pro $x = \infty$ nahradíme požadavkem omezenosti řešení pro $x \to \infty$).

   [Hledáme řešení ve tvaru $\sum_{n\in Z} c_n(x) \exp(\frac{2\pi}{T} itn)$. Odtud $c_n''(x) - \frac{2\pi}{kT} inc_n(x) = 0$, char. polynom $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, kde $\omega = (1 \pm i)q_n$, $\pm$ odpovídá kladnému/zápornému n a $q_n = \sqrt{\frac{\pi|n|}{kT}}$. Z požadavku omezenosti řešení pro $x \to \infty$ zůstane jen řešení $c_n(x) = c_n \exp(-(1 \pm i)q_n x)$. Obecné řešení má tvar:

$$\sum_{n\in Z} c_n \exp(-(1 \pm i)q_n x) \exp(\frac{2\pi}{T} int)$$

   kde konstanty c_n dostanu z fourierova rozvoje okrajové podmínky $f(t)$.

   Fyzikální interpretace: x je hloubka pod povrchem země, $f(t)$ kolísající teplota povrchu, $k = 2 \cdot 10^{-3} cm^2/sec$ tepelná vodivost půdy. Reálná část prvního modu (členu u c_1) je

$$\exp(-q_1 x) \cos(\frac{2\pi}{T} t + \gamma_1 - q_1 x)$$

   Vidím, že menší T dává větší q_1, tj. rychlejší tlumení amplitudy do hloubky (člen $\exp(-q_1 x)$), také větší zaostávání fáze (člen $-q_1 x$ v argumentu cosinu). Viz ilustrující obrázky na předchozí stránce pro T rovno rok resp. den. (Údaje jsou v cm a v sekundách).

6. $\Omega = \{(x, y);\ x^2 + y^2 < a^2\}$, počáteční podmínka $u|_{t=0} = f$, okrajová podmínka $u_{r=a} = 0$, navíc předpoklad radiální symetrie, tj. vše závisí jen na $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   [V polárních souřadnicích je to rovnice $\partial_t u - \partial_{rr} u - \frac{1}{r}\partial_r u = 0$, řešení ve tvaru $c(t)R(r)$ vedou na $\exp(-\lambda_m^2 t) J_0(\lambda_m r)$, kde J_0 je Besselova funkce a $\lambda_m = \alpha_m/a$, kde α_m jsou kořeny J_0 (splnění okrajové podmínky!) Obecné řešení má tvar

$$\sum_{m\geq 1} c_m \exp(-\lambda_m^2 t) J_0(\lambda_m r)\,.$$

7. Jako předchozí příklad, ale bez předpokladu radiální symetrie, tj. $u = u(t, r, \varphi)$.

[Řešení hledám ve tvaru $c(t)R(r)\exp(in\varphi)$, vede na n-tou Besselovu rovnici pro $R(r)$, řešení mají tvar $\exp(-\lambda_{n,m}t)J_n(\lambda_{n,m}r)\exp(in\varphi)$, kde J_n je Besselova funkce, $\{\alpha_{m,n}\}_{m\in N}$ její kořeny, $\lambda_{n,m} = \alpha_{n,m}/a$. Jako vedlejší produkt dostaneme, že $J_n(\lambda_{n,m}r)\exp(in\varphi)$ jsou vlastní funkce laplace v dané geometrii.