① $\int e^{-\sum_{i\leq j} x_i x_j} dx$

② $\int x^{100} y^{200} e^{-x^2-2xy-3y^2} dx\,dy$

③ $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx = \mathrm{Re}\sqrt{\frac{\pi}{i}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

---

④ Objem koule < gauss polární souřadnice

V jaké dimenzi by moře o hloubce 5 km zabíralo více než 99% objemu celé planety poloměru 10 000 km

---

⑤ míra $\exp \mu + \frac{\mu\otimes\mu}{2!} + \dots + \frac{\mu\otimes\dots\otimes\mu}{n!} + \dots$ na $X = \{\emptyset\} \cup \Omega \cup \Omega\times\Omega \cup \Omega\times\Omega\times\Omega \dots$ μ je nějaká míra konečná na Ω

X konfigurační prostor "bodového pole" se nazývá Poissonova (třeba Ω vícerozměrný interval, μ Lebesgueova). Po normalizaci faktorem $e^{-\mu(\Omega)}$ jde o Poissonovu pravděpodobnost

Určete její obraz při zobrazení

$$\{(\omega_1, \dots, \omega_n) \to n\} : X \to \mathbb{N}$$

---

⑥ Nechť μ je pravděpodobnost na $\mathbb{R}$, $\int x\,d\mu(x) = a$ střední hodnota $\int (x-a)^2 d\mu(x) = b^2$ rozptyl. Pak obraz $\overset{*}{N}\mu$ při zobrazení $\{x \to \frac{x}{N}\}$ konverguje k δ_a (tzv. zákon velkých čísel) zatímco, pro $a=0$ a $b=\frac{1}{2}$ obraz $\overset{*}{N}\mu$ při zobrazení $\{x \to \frac{x}{\sqrt{n}}\}$ konverguje, ve smyslu bodové konvergence vytvořující funkce

Dostatečně rychlé ubývání v ∞

$F(\xi) = \int e^{\xi x} d\mu(x)$ $\quad \mu_n \to \mu$ znamená $F(\mu_n) \to F(\mu)$

ke gaussově míře $\frac{d\mu_{gauss}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

---

⑦ Vyjádřete $\overset{*}{N}\left(\sum \alpha_i \delta_{a_i}\right)$ pomocí vzorce analogického pro $(a+b)^N$ $\left(\sum_i b_i\right)^N$

---

⑧ Vysvětlete, proč faktory $\sqrt{\pi}$ a $\frac{1}{12n}$ u Stirlingova vzorce

---

⑨ Fourierova transformace intervalu $\{\frac{1}{i}, j\}$ $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ v diskrétní Fourierově transformaci

---

⑩ Coulombův potenciál v $\mathbb{R}^n$ tzn. řešení rovnice $\Delta f = \delta_0$

---

⑪ Odvození formule pro Besselovu funkci $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi$

---

⑫ $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

---

⑬ Laurentův rozvoj tzn. resolventy matice $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ spec. pro nilpotentní A