Elementární odvození Stirlingovy formule

Mirko Rokyta*

31.1.2006

Abstrakt

Elementární ještě neznamená jednoduchý :-). Myslí se tím, že pro odvození budou potřeba pouze základní znalosti. Konkrétně v tomto případě nebude potřeba nic, co by neznal absolvent prvního ročníku MFF UK: pojem limity posloupnosti a některé základní vlastnosti posloupností, součet geometrické řady, větu o nabývání mezihodnot pro spojité funkce, vlastnosti funkce exp, Taylorovu řadu funkce ln. Kdo zná Wallisovu formuli pro π, bude mít o paragraf kratší čtení, ale i její odvození lze zde nalézt, pokud máte základní znalosti o určitém (Riemannově) integrálu.

1

Našim cílem je odvodit tzv. *Stirlingovu formuli*, neboli výrok, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje $\theta_n \in (0,1)$ takové, že platí

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\,.$$

Nejprve učiníme některé přípravné úvahy. Z teorie Taylorových řad víme, že pro $|x| < 1$ je

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\dots\,, \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\dots\,.$$

Odečtením těchto rovností dostaneme:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\Big(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^6}{7}\dots\Big)\,, \qquad |x| < 1\,. \tag{1}$$

Položme v tomto vztahu $x = \frac{1}{2n+1}$, tedy $\frac{1+x}{1-x} = (1+\frac{1}{n})$, a vynásobme rovnost (1) výrazem $\frac{1}{2x} = (n+\frac{1}{2})$:

$$\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = 1 + \frac{1}{3\,(2n+1)^2} + \frac{1}{5\,(2n+1)^4} + \frac{1}{7\,(2n+1)^6}\dots\,, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Pravá strana rovnosti (2) je jednak evidentně větší než 1, jednak, odhadneme-li číselné koeficienty u zlomků triviálně: $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{7} < \frac{1}{3}$, atd., dostaneme geometrickou řadu, kterou lze sečíst:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3\,(2n+1)^2} + \frac{1}{5\,(2n+1)^4} + \dots \quad &< \quad 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+1)^6} + \dots\right) = \\
&= \quad 1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = \\
&= \quad 1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{4n^2+4n} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}\,.
\end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že

$$1 < \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

*Podle Fichtěngolcovy knihy [1].

Odtud máme (protože exp je rostoucí funkce)

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}\,, \qquad n \in \mathbb{N},$$

neboli po vydělení e:

$$1 < \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

2

Položme nyní

$$a_n := \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\,, \qquad b_n := e^{\frac{1}{12n}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Potom

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\,, \qquad \frac{b_n}{b_{n+1}} = e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}} = e^{\frac{1}{12n(n+1)}}\,.$$

Lze tedy (3) psát jako

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}}\,, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Z první z nerovností v (5) a z definice a_n vidíme, že $a_n > a_{n+1} > 0$, tj. a_n je klesající zdola omezená posloupnost, a tedy existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a \geq 0$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = a\,.$$

Z (5) však rovněž plyne $\frac{a_n}{b_n} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, posloupnost $\frac{a_n}{b_n}$ je tedy rostoucí, přitom má stejnou limitu a jako klesající posloupnost a_n. Tedy je

$$\frac{a_n}{b_n} < a < a_n\,, \qquad \text{tj.} \quad a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n e^0\,.$$

Protože exponenciela je spojitá funkce, existuje $\theta_n \in (0,1)$ takové, že $a = a_n e^{-\frac{\theta_n}{12n}} = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\theta_n}{12n}}$. Tím jsme ukázali, že

$$\text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ existuje } \theta_n \in (0,1), \text{ že} \qquad n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\,, \quad \text{kde} \quad a = \lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\,. \tag{6}$$

3

Číslo a v (6) spočteme pomocí *Wallisovy formule*:[1]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\,. \tag{7}$$

Rozšíříme zlomek uvnitř druhé mocniny výrazem $2n!!$ a uvážíme, že $2n!! = 2^n n!$. Poté vzniklé faktoriály vyjádříme pomocí (6) a upravíme:

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}\left(a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\right)^2}{a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\,e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{24n}}\,.$$

[1] Pokud ji znáte, tím líp, pokud ne, lze její nepříliš obtížné odvození nalézt v následujícím paragrafu. Tam se taky mluví o dvojfaktoriálech (!!), viz (10).

Z (7) pak dostaneme

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(a\sqrt{\frac{n}{2}} e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{24n}} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n+2} \cdot a^2 \cdot e^{\frac{4\theta_n - \theta_{2n}}{12n}} = \frac{a^2}{4} .$$

Proto je $a = \sqrt{2\pi}$ a my jsme ukázali to, co jsme chtěli, a sice, že

$$\text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ existuje } \theta_n \in (0,1), \text{ že } \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}} . \tag{8}$$

4

Odvodíme ještě pro úplnost Wallisovu formuli (7). Nejprve spočteme $I_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x \, dx$ pro každé celé $k \geq 0$. Přímým výpočtem obdržíme $I_0 = \frac{\pi}{2}$ a $I_1 = 1$, a pro obecné $k \geq 2$ použijeme metodu per partes:

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x \, dx = \Big[-\cos x \sin^{k-1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{k-2} x \, dx = \\ &= 0 + (k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{k-2} x \, dx = (k-1) I_{k-2} - (k-1) I_k . \end{aligned}$$

Odtud jednoduše dostáváme následující rekurentní formuli $I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}$, $k = 2, 3, \ldots$. Jejím opakovaným použitím zvlášť pro $k = 2n$ a $k = 2n+1$, a s využitím znalosti hodnot I_0 a I_1 dostaneme pro $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} , \\ I_{2n+1} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2n}{2n+1} . \end{aligned}$$

Už jsme skoro u konce. Vzhledem k tomu, že máme $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ a tedy $\sin x \in \langle 0, 1 \rangle$, platí na $\langle 0, \pi/2 \rangle$ a pro všechna přirozená n nerovnosti $\sin^{2n} x \geq \sin^{2n+1} x \geq \sin^{2n+2} x$. Přeintegrujeme-li tyto nerovnosti od 0 do $\frac{\pi}{2}$, dostaneme $I_{2n} \geq I_{2n+1} \geq I_{2n+2}$, neboli

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} .$$

Vydělme tuto nerovnost koeficientem u $\frac{\pi}{2}$ v členu vlevo a dostaneme

$$\frac{\pi}{2} \geq \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} \right)^2 \geq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} .$$

Protože posloupnost vpravo má limitu $\frac{\pi}{2}$, má tutéž limitu i posloupnost uprostřed, a tedy platí

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1} \right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!} \right)^2 , \tag{9}$$

použijeme-li obvyklé značení

$$(2n)\,!! := 2.4 \ldots 2n , \qquad (2n-1)\,!! := 1.3 \ldots (2n-1) , \qquad n = 1, 2, \ldots , \tag{10}$$

(pro $n = 0$ klademe $0\,!! := 1$, $(-1)\,!! := 1$). Tím je Wallisova formule (7) dokázána.

Reference

[1] Fichtěngolc, G.M.: Kurs differencialnogo i integralnogo isčislenija, Moskva, 1966.

Doc. RNDr. Mirko Rokyta, CSc.
Katedra matematické analýzy MFF UK
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
mirko.rokyta@mff.cuni.cz