(7) označ $f^{*n} = \underbrace{f*f*\cdots*f}_{}$

n-násobná konvoluce.

Potom $$(f+g)^{*n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{*j} * g^{*(n-j)}$$

Důkaz je zcela analogický binomické větě.
Podstatné je ovšem komutativita: $\boxed{f*g = g*f}$.

<u>Aplikace:</u> X_j .. (nezávislé) náhodné veličiny s hustotou
$p\delta_1 + (1-p)\delta_0$; $p \in [0,1]$ pevné.

tj.: $X_j = 1$ s pravd. p; 0 s pravd. $1-p$.

<u>Potom:</u>

$Y := X_1 + \dots + X_n$ má hustotu

$$(p\delta_1 + (1-p)\delta_0)^{*n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j \delta_1^{*j} (1-p)^{n-j} * \delta_0^{*(n-j)}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \underline{\underline{\delta_j}} \quad \left(\begin{array}{c}\text{neboť} \\ \delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}\end{array}\right)$$

tj.: $P\{Y=j\} = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$

Zobecnění binomické formule je multinomické formule:

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, \dots k_m \geq 0 \\ k_1 + \cdots k_m = n}} \binom{n}{k_1, \dots k_m} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$$

kde $$\binom{n}{k_1, \dots k_m} := \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$$ je multinomický koeficient

---

Užití:

$$(\alpha_1 \delta_{a_1} + \cdots + \alpha_m \delta_{a_m})^{*N}$$

$$= \sum_{k_1, \dots k_m} \binom{\cancel{n}\, N}{k_1, \dots k_m} \alpha_1^{k_1} \delta_{a_1}^{*k_1} * \cdots * \alpha_m^{k_m} \delta_{a_m}^{*k_m}$$

$$= \sum \Big(\qquad \Big) \underbrace{\alpha_1^{k_1} \delta_{k_1 a_1} * \cdots \alpha_m^{k_m} \delta_{k_m a_m}}_{\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_m^{k_m} \cdot \delta_{k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m}}$$