Příklad A1.

$$\int x^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Per-partes: $u'(x) = x^2$, $u(x) = x^3/3$, $v(x) = \operatorname{arctg}(1/x)$, $v'(x) = -1/(x^2+1)$. Tedy

$$I = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\,.$$

Dále

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}\,,$$

a

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+1} = \frac{1}{2}\ln|y+1| = \ln\sqrt{x^2+1}\,.$$

Celkový výsledek

$$\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{3}\ln\sqrt{x^2+1}$$

platí v $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Příklad A2.

$$\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x}\,.$$

Substituce $t = \operatorname{tg}(x/2)$ vede na

$$\int \frac{dt}{t^2+t-1}\,.$$

Polynom ve jmenovateli má kořeny $(-1 \pm \sqrt{5})/2$, tedy

$$\frac{1}{t^2+t-1} = \frac{A}{t+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{t+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\,.$$

Vychází $-A = B = 1/\sqrt{5}$ a tedy

$$\int \frac{dt}{t^2+t-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2t+1-\sqrt{5}}{2t+1+\sqrt{5}}\right|\,.$$

Celkový výsledek:

$$\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{5}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{5}}\right|\,.$$

Kde to platí? Substituce $t = \mathrm{tg}(x/2)$ zaručuje platnost v $(-\pi, \pi)$, ovšem musíme vyloučit body, kde $\mathrm{tg}(x) = 2$, a takové jsou $(-\pi, \pi)$ dva: $x_0 = \mathrm{arctg}(2)$ a $x_1 = \mathrm{arctg}(2) - \pi$.

Příklad B1.

$$\int \exp(-x) \ln(2 + \exp x)\, dx\,.$$

Per-partes: $u'(x) = \exp(-x)$, $u(x) = -\exp(-x)$ a $v(x) = \ln(2 + \exp x)$, $v'(x) = \exp(x)/(2 + \exp(x))$. Tedy

$$I = -\exp(-x) \ln(2 + \exp x) + \int \frac{dx}{2 + \exp x}\,.$$

Poslední integrál přeměníme substitucí $t = \exp x$, $dx = dt/x$ na

$$\int \frac{dt}{t(t+2)}\,.$$

Snadno dopočteme

$$\frac{1}{t(t+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2})\,,$$

tedy

$$\int \frac{dt}{t(t+2)} = \ln \sqrt{\left|\frac{t}{t+2}\right|}\,.$$

Toto platí v $(-\infty, -2)$, v $(-2, 0)$ a v $(0, \infty)$. Protože však $t = \exp x > 0$, je

$$\int \exp(-x) \ln(2 + \exp x)\, dx = -\exp(-x) \ln(2 + \exp x) + \frac{x}{2} - \ln \sqrt{\exp x + 2}\,.$$

v $(-\infty, \infty)$.

Příklad B2.

$$\int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x}\,.$$

Substituce $t = \mathrm{tg}(x/2)$ vede na

$$\int \frac{dt}{t^2 + t + 2}\,.$$

Jmenovatel nemá reálné kořeny; upravíme:

$$t^2 + t + 2 = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \left\{ \left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1 \right\}$$

Tedy

$$\int \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{4}{7}\int \frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right).$$

Použila se substituce $y = \frac{2t+1}{\sqrt{7}}$, $dt = (\sqrt{7}/2)dy$. Celkem tedy

$$\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{7}}\right).$$

Použitá substituce zaručuje platnost výsledku v celém $(-\pi, \pi)$, neboť jmenovatel je vždy nenulový.