X. Spočetnost a mohutnost.

Definice. Množina A se nazve spočetná, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi A a množinou přirozených čísel.

Názorně: prvky A lze seřadit do posloupnosti.

Poznámky.

• Pokud A je spočetná, a množinu B lze vzájemně jednoznačně zobrazit na A, pak B je spočetná

• Pokud A, B jsou spočetné, pak také $A \cup B$ je spočetná

• Pokud A je spočetná, a $B \subset A$ je nekonečná, je také B spočetná

• Všimněte si paradoxní vlastnosti nekonečných množin: lze je vzájemně jednoznačně zobrazit na nějakou jejich podmožinu. (To by se s konečnou množinou nepodařilo.)

Příklady.

① $\mathbb{N}$ je spočetná

② $\mathbb{Z}$ je spočetná

Věta X.1. Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Věta X.2. (Cantor.) Interval $(0, 1)$ není spočetný.

Definice. Řekneme, že množina B má mohutnost kontinua, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi B a množinou reálných čísel.

Poznámky. • interval $(0, 1)$ má mohutnost kontinua. Dá se ukázat, že každý netriviální interval má mohutnost kontinua. Také množina iracionálních čísel má mohutnost kontinua.

• G. Cantor v roce 1878 zformuloval tzv. hypotézu kontinua:

Je-li $A \subset \mathbb{R}$ nekonečná množina, tak potom

buď A je spočetná, nebo A má mohutnost kontinua.

Jinými slovy, každá nekonečná množina čísel se dá vzájemně jednoznačně zobrazit buď na $\mathbb{N}$, nebo na $\mathbb{R}$.

Dlouho se nevědělo, zda hypotéza kontinua platí nebo ne. V roce 1938 dokázal překvapivě K. Gödel, že hypotézu kontinua nelze vyvrátit. V roce 1963 pak dokázal P. Cohen, že hypotézu kontinua nelze dokázat. Jde tedy o "nerozhodnutelné" tvrzení.

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazve algebraické, pokud existuje nenulový polynom $p(x)$ s celočíselnými koeficienty takový, že $p(a) = 0$. V opačném případě se a nazve transcendentní.

Poznámky.
- každé racionální číslo je algebraické
- číslo $\sqrt{2}$ je algebraické, iracionální číslo
- lze dokázat, že e, π jsou transcendentní

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazve vyčíslitelné, pokud existuje konečný algoritmus (program), který pro zadané n vypočítá a s přesností na n desetinných míst.

Věta X.3. Existují nevyčíslitelná čísla.

Literatura: Balcar, Štepánek: Teorie množin.