5. Primitivní funkce.

Kdybychom byli přespříliš svědomití,
neexistovala by vůbec matematika.

Úmluva. V celé kapitole jsou I a J otevřené intervaly.

Definice. Nechť $F(x)$, $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ v intervalu I, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in I$. Značíme

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{v } I\,.$$

Terminologie: $F(x)$ se také nazývá neurčitý integrál k $f(x)$, $f(x)$ je integrand, x je integrační proměnná.

Příklady. ① $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ v $\mathbb{R}$, $n \geq 0$ celé

② $\int \dfrac{dx}{x^n} = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$, $n \geq 2$ celé

③ $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$; obecněji $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$ v I, pokud $f'(x)$ existuje vlastní a $f(x) \neq 0$ všude v I

④ $\int e^x\,dx = e^x$, $\int \sin x\,dx = -\cos x$, $\int \cos x\,dx = \sin x$, vše v $\mathbb{R}$

⑤ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ v $(-1, 1)$, $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$ v $\mathbb{R}$

Věta 5.1. (Linearita integrálu.)
(1)

$$\int af(x) + bg(x)\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

v každém I, kde mají smysl integrály vpravo;
(2) Jestliže $\int f(y)\,dy = F(y)$ v J, pak

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

v každém I takovém, že $\{ax+b : \ x \in I\} \subset J$.

Věta 5.2. (Integrace per-partes.) Nechť $u(x)$, $v(x)$ mají vlastní derivace v $\forall x \in I$. Potom

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx \qquad \text{v } I\,.$$

Příklady. ① $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \ln x$ v $(0, \infty)$

② označme $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy $I_1 = \operatorname{arctg} x$ v $\mathbb{R}$, a integrací per-partes odvodíme rekurentní vzorec

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \qquad n \in N\,.$$

Věta 5.3. (1. věta o substituci.) Nechť $\int g(y)\, dy = G(y)$ v J, a nechť $f(x) : I \to J$ má vlastní derivaci v $\forall x \in I$. Potom

$$\int g(f(x)) f'(x)\, dx = G(f(x)) \qquad \text{v } I.$$

Příklady. ① $\int x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$ v $\mathbb{R}$

② $\int \cos^5 x \, dx = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$ v $\mathbb{R}$

Rozklad polynomů. Každý (nenulový) polynom $Q(x)$ lze rozložit

$$Q(x) = A \prod_{j=1}^{k} (x - a_j)^{p_j}$$

kde $a_j \in \mathbb{C}$ se nazývají kořeny, p_j jejich násobnosti. Platí $\sum_{j=1}^k p_j$ rovná se stupeň $Q(x)$.

Důsledek: každý (nenulový) polynom je roven nule v nejvýše konečně bodech; pokud se dva polynomy shodují v nekonečně bodech, jsou nutně totožné (mají stejné koeficienty.)

Pokud má $Q(x)$ reálné koeficienty a $a = \alpha + i\beta$ je kořen násobnosti p, tak $\bar{a} = \alpha - i\beta$ je také kořen (stejné násobnosti) a platí

$$(x-a)^p (x-\bar{a})^p = \big[(x-a)(x-\bar{a})\big]^p = \big[x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2\big]^p\,,$$

přičemž posledně uvedený polynom druhého stupně nemá tedy žádné reálné kořeny.

Tedy každý polynom s reálnými koeficienty lze rozložit

$$Q(x) = A \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{p_j} \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 + b_k x + c_k\right)^{q_k}\,, \qquad (*)$$

kde A, a_j, b_k, c_k jsou reálná čísla, tj. a_j jsou reálné kořeny $Q(x)$ násobnosti p_j, zatímco polynomy $x^2 + b_k x + c_k$ skrývají dvojici komplexně sdružených kořenů násobnosti q_k.

Věta F. (Rozklad na parciální zlomky.) Nechť $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy a stupeň P je menší než stupeň Q. Nechť $Q(x)$ má rozklad (*). Potom existují jednoznačně určená čísla A_{jr}, B_{ks} a $C_{ks} \in \mathbb{R}$ tak, že

$$R(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{p_j} \frac{A_{jr}}{(x-a_j)^s} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{q_k} \frac{B_{ks}x + C_{ks}}{(x^2 + b_k x + c_k)^s}$$

platí pro každé x kde $Q(x) \neq 0$.

Integrace racionální funkce. Je-li dána $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, pak:

1. Pokud stupeň P je větší nebo roven stupni Q, dělením převedu na tvar

$$R(x) = p(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}\,,$$

kde $p(x)$, $\tilde{P}(x)$ jsou polynomy a stupeň $\tilde{P}$ je menší než stupeň Q.

2. Funkci $\dfrac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}$ rozložím podle Věty F.

3. Integruji jednotlivé členy rozkladu.

Příklad.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-x+1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

platí v $(-\infty, 1)$ a v $(1, \infty)$.

Věta 5.4. (2. věta o substituci.) Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$, nechť $\varphi(t) : J \to I$ je vzájemně jednoznačná a $\varphi'(t)$ existuje konečná a nenulová pro $\forall t \in J$.

Jestliže

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = G(t) \qquad \text{v } J\,,$$

pak

$$\int f(x)\,dx = G\big(\varphi_{-1}(x)\big) \qquad \text{v } I\,.$$

Poznámky. • 1. věta o substituci - schematicky:

$$\int g\big(f(x)\big) f'(x)\,dx \,\left|\begin{array}{c} y = f(x) \\ dy = f'(x)\,dx \end{array}\right| = \int g(y)\,dy = G(y) = G\big(f(x)\big)\,.$$

Používá se v případě, že integrand má speciální tvar, tj. složená funkce krát derivace vnitřní funkce. Substituovaná funkce $f(x)$ nemusí být prostá.

• 2. věta o substituci - schematicky:

$$\int f(x)\,dx \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array} \right| = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = F(t) = F\big(\varphi_{-1}(x)\big)\,.$$

V tomto případě substituovaná funkce $\varphi(t)$ musí být vzájemně jednoznačná a $\varphi'(t) \neq 0$. Druhá věta o substituci se používá hlavně ve standardních situacích, viz dále.

Typové substituce. V dalším je $R = R(u,v)$ racionální funkce dvou promměných, tj. R je z u, v vytvořena operacemi $+$, $-$, $\cdot$ a $/$.

①

$$\int R\bigg(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\bigg)\,dx\,.$$

Substituce $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ vede na integraci racionální funkce.

Příklad:

$$\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x-1}}\,.$$

Polož $t = \sqrt{x-1}$, tj. $x = \varphi(t) = t^2 + 1$, $\varphi'(t) = 2t$ - předpoklady Věty 5.4 splněny ($I = (1,\infty)$, $J = (0,\infty)$); dostáváme

$$\int \frac{2\,dt}{(t+1)^2} = 2\ln(t+1) + \frac{2}{t+1} \quad \text{v } I.$$

Po zpětné substituci je výsledek $2\ln(1+\sqrt{x-1}) + 2/(1+\sqrt{x-1})$ v $(1,\infty)$.

②

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx\,.$$

Používá se substituce $t = \operatorname{tg}(x/2)$, tj. $x = \varphi(t) = 2\operatorname{arctg} x$. Odsud

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,,$$

což vede opět na integraci racionální funkce. Pozor: substituce dává výsledek jen pro $x \in (-\pi, \pi)$.

Příklad:

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x}\,;$$

vede na integrál

$$\int \frac{2\,dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\big(\frac{t}{\sqrt{3}}\big)\,.$$

Tedy

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\big(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}\big)\,;$$

platí v $(-\pi,\pi)$ a díky periodicitě v každém intervalu $((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$. Pokud chci primitivní funkci na delším intervalu, musím výsledek provést slepení (zespojitění) výsledné funkce

$$F_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\big(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}\big)\,.$$

Například funkce

$$F_1(x) = \begin{cases} F_0(x), & x \in (-\pi,\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x = \pi \\ F_0(x) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & x \in (\pi, 3\pi) \end{cases}$$

je primitivní k $f(x) = 1/(2+\cos x)$ v intervalu $(-\pi,3\pi)$. Pro $x \neq \pi$ je $F_1'(x) = f(x)$ zjevné, v bodě $x=\pi$ to elegantně vyřešíme pomocí pozdější věty.

③

$$\int R\big(\exp(ax)\big)\,dx$$

se převede na integraci racionální funkce substitucí $t = \exp(ax)$, $dx = dt/at$.

④

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx\,.$$

Pokud $a < 0$, lze BÚNO předpokládat, že $p(x) = ax^2+bx+c$ má reálné kořeny. Přepíšeme

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = \pm(x-\mu)\sqrt{\frac{a(x-\lambda)}{x-\mu}}\,,$$

čímž obdržíme integrál typu ①.

Pro $a > 0$ použijeme Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x\,.$$

Ta vede opět na racionální funkci, navíc lze dokázat, že splňuje předpoklady Věty 5.4. na všech intervalech, kde je $p(x) > 0$.

Poznámka. (Integrál a derivace komplexních funkcí.)
Nechť $F(x)$, $f(x) : I \to \mathbb{C}$. Potom $F'(x) = f(x)$ značí

$$\big\{\operatorname{Re} F(x)\big\}' = \operatorname{Re} f(x)\,, \qquad \big\{\operatorname{Im} F(x)\big\}' = \operatorname{Im} f(x)\,.$$

Stejný význam má $\int f(x)\,dx = F(x)$.
Díky vzorečku (dokážeme později při přesnějším zavedení elementárních funkcí)

$$\exp[(\alpha + i\beta)x] = \exp(\alpha x)[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)]$$

vyplývá, že $\exp(ax)' = a\exp(ax)$, a také

$$\int \exp(ax)\,dx = \frac{\exp(ax)}{a}$$

platí pro $a \in \mathbb{C}$. Rozkladem na reálnou a imaginární část získáme užitečné vztahy

$$\int \exp(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx = \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha^2 + \beta^2}\big[\alpha\cos(\beta x) + \beta\sin(\beta x)\big]\,,$$
$$\int \exp(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx = \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha^2 + \beta^2}\big[\alpha\sin(\beta x) - \beta\cos(\beta x)\big]\,.$$