

1. REÁLNÉ FUNKCE. LIMITA A SPOJITOST.

Definice. Necht M, N jsou množiny. Funkcí (zobrazením) f z M do N se rozumí libovolný předpis, který každému prvku z M přiřadí právě jeden prvek z N . Značíme $f : M \rightarrow N, x \mapsto f(x)$.

Funkce je prostá, pokud $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$. Pro $A \subset M$ definuji obraz A jako

$$f(A) = \{y \in N; \exists x \in M \text{ tak, že } f(x) = y\}$$

a pro $B \subset N$ definuji vzor B jako

$$f^{-1}(B) = \{x \in M; f(x) \in B\}.$$

Funkce je 'na' (zobrazuje M na N), pokud $f(M) = N$.

Je-li $f : M \rightarrow N$ prostá a na, řekneme, že je vzájemně jednoznačná. Pak lze definovat inverzní funkci $f^{-1} : N \rightarrow M$, která prvku $y \in N$ přiřadí ten (jednoznačně určený) prvek $x \in M$, že $f(x) = y$.

Je-li $f : M \rightarrow N$, a $A \subset M$, pak restrikcí (zúžením) f na A rozumím zobrazení, která má stejný předpis jako f , ale uvažují ho jenom pro $x \in A$. Značíme $f|_A$.

Je-li $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow K$, definujeme složené zobrazení (superpozici) $g \circ f : M \rightarrow K$ předpisem $x \mapsto g(f(x))$.

Občas píšeme $f : M \rightarrow N$, ačkoliv $f(x)$ není definováno pro úplně všechna $x \in M$. Pak značí D_f (definiční obor f) množinu těch $x \in M$, pro něž $f(x)$ definováno je, a H_f (obor hodnot) značí $f(D_f)$.

Definice. Necht $\delta > 0$. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \dots \text{kruhové } \delta\text{-okolí } x_0$$

$$P(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \dots \text{prstencové (redukované) } \delta\text{-okolí } x_0$$

$$U_+(x_0, \delta) = [x_0, x_0 + \delta) \dots \text{pravé kruhové } \delta\text{-okolí } x_0$$

$$U_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0] \dots \text{levé kruhové } \delta\text{-okolí } x_0$$

$$P_+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta) \dots \text{pravé prstencové } \delta\text{-okolí } x_0$$

$$P_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \dots \text{levé prstencové } \delta\text{-okolí } x_0$$

Dále definujeme

$$U(\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, \infty], P(\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, \infty)$$

$$U(-\infty, \delta) = [-\infty, -\frac{1}{\delta}), P(-\infty, \delta) = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$$

$$U_-(\infty, \delta) = U(\infty, \delta), P_-(\infty, \delta) = P(\infty, \delta), U_+(-\infty, \delta) = U(-\infty, \delta), P_+(-\infty, \delta) = P(-\infty, \delta).$$

Pravé okolí ∞ , levé okolí $-\infty$ nedefinujeme.

Poznámky.

- pozorují: $\delta_1 < \delta_2 \implies U(x_0, \delta_1) \subset U(x_0, \delta_2)$... čím menší δ , tím menší okolí (platí i u $\pm\infty$)
- jediný rozdíl mezi $U(x_0, \delta)$ a $P(x_0, \delta)$: bod x_0
- pro $x_0 \in \mathbb{R}$ platí:

$$U(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \delta\}$$

$$P(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

- píšeme $U(x_0)$ místo $U(x_0, \delta)$, pokud na δ nezáleží; obrat "na jistém $P(x_0)$ platí..." je zkratka za "existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí..."

Věta 2.1. (Hausdorffův princip oddělení.) Nechtě $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \neq x_1$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že $U(x_0, \delta) \cap U(x_1, \delta) = \emptyset$. Speciálně $x_0 \notin U(x_1, \delta)$.

Definice. Nechtě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechtě $f(x)$ je definována na jistém $P(x_0, \delta)$. Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0 , jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)].$$

Značíme $f(x) \rightarrow A$ pro $x \rightarrow x_0$, nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Terminologie: pokud $A \in \mathbb{R}$, jde o limitu vlastní (konečnou), pro $A = \pm\infty$ je limita nevlastní.

Poznámky.

- limita v x_0 nezávisí na $f(x_0)$, f nemusí být v x_0 ani definována
- názorně: x blízko x_0 , ale různé od $x_0 \implies f(x)$ blízke (nebo rovné) A
- ekvivalentní zápis:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[f(P(x_0, \delta)) \subset U(A, \varepsilon)].$$

speciálně pro $x_0, A \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon].$$

- limita (pokud existuje) je nejvýše jedna

Příklady. ① $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

② $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} = \infty$

③ Dirichletova funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $P_+(x_0, \delta)$ (respektive $P_-(x_0, \delta)$). Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in P_+(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)]$$

respektive

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in P_-(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)].$$

Značíme $f(x) \rightarrow A$ pro $x \rightarrow x_0+$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$, resp. $f(x) \rightarrow A$ pro $x \rightarrow x_0-$, $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$.

Příklady.

① pro funkci signum

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

platí: $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn} x = -1$

② $\lim_{x \rightarrow 0\pm} x^{-1} = \pm 1$

Věta 2.2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existuje a rovná se A
- (2) limity $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ existují a rovnají se témuž A

Úmluva. Reálnou funkcí rozumíme funkci z \mathbb{R} do \mathbb{R} , tj. nepřipouštíme $\pm\infty$ v argumentu nebo hodnotě funkce. Dále symbolem $\exists \delta > 0$ rozumíme $\exists \delta \in (0, \infty)$.

Definice. Funkce $f(x)$ se nazve omezená na množině M , pokud existuje $K > 0$ tak, že $|f(x)| \leq K$ pro $\forall x \in M$.

Příklady.

① $\sin x$ je omezená v \mathbb{R}

② $f(x) = \frac{1}{x}$ není omezená na žádném $P(0)$

Lemma 2.1. (1) Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 vlastní limitu. Potom $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$.

(2) Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 limitu (i nevlastní), různou od 0. Potom $f(x)$ je na jistém $P(x_0)$ “odražená od nuly”, tj.

$$(\exists \delta > 0)(\exists \Delta > 0)[x \in P(x_0, \delta) \implies |f(x)| > \Delta].$$

Věta 2.3. (Aritmetika limit - 1. verze.) Nechť $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow B$ pro $x \rightarrow x_0$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Potom

- (1) $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$
- (2) $f(x) - g(x) \rightarrow A - B$
- (3) $f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$
- (4) pokud $B \neq 0$, tak $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$
pro $x \rightarrow x_0$.

Věta 2.4. Nechť $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0$. Potom $f(x) \cdot g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0$.

Poznámka. Platí jednostranné verze uvedených vět, např.:

Jestliže $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow B$ pro $x \rightarrow x_0+$, pak $f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$ pro $x \rightarrow x_0+$.

Jestliže $f(x)$ je omezená na jistém $P_-(x_0)$ a $g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0-$, pak $f(x) \cdot g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0-$.

Atd.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v x_0 , jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) [x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)].$$

Ekvivalentní zápisy:

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) [f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)] \\ &(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) [|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] \end{aligned}$$

Věta 2.5. (Vztah limity a spojitosti.) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) $f(x)$ je spojitá v x_0
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existuje a rovná se $f(x_0)$

Stručně řečeno: spojitě funkce jsou takové, že limitu $x \rightarrow x_0$ spočítám dosazením $x = x_0$.

Příklady.

① polynom, tj. funkce tvaru $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, kde $a_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, je spojitý v každém $x_0 \in \mathbb{R}$

② racionální funkce, tj. funkce tvaru $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x), q(x)$ jsou polynomy, je spojitá v každém $x_0 \in \mathbb{R}$, ve kterém $q(x_0) \neq 0$

③ funkce $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$ jsou spojitě v každém bodě $z \in \mathbb{R}$; funkce $\log x$ je spojitá v každém bodě $z \in (0, \infty)$ - uvidíme později

④ funkce \sqrt{x} je spojitá v každém bodě z $(0, \infty)$; uvidíme později, že $\sqrt[n]{x}$ je vždy spojitá (ve svém definičním oboru)

⑤ funkce $\operatorname{sgn} x$ je spojitá všude mimo $x = 0$

⑥ funkce $F(x) = x \cdot D(x)$, kde $D(x)$ je Dirichletova funkce, je spojitá v $x = 0$ a nikde jinde

Věta 2.6. (Limita superpozice) Nechť $f(x) \rightarrow y_0$ pro $x \rightarrow x_0$, nechť $g(y) \rightarrow A$ pro $y \rightarrow y_0$, kde $A, x_0, y_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť je dále splněn alespoň jeden z následujících předpokladů:

(a) $g(y)$ je spojitá v y_0

(b) $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x) \neq y_0$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$

Potom $g(f(x)) \rightarrow A$ pro $x \rightarrow x_0$.

Příklady.

① $\sqrt{x^3 - 3x + 1} \rightarrow \sqrt{3}$ pro $x \rightarrow 2$

② $\frac{\sin(x + x^2)}{x} \rightarrow 1$ pro $x \rightarrow 0$

③ !! bez předpokladu (a) nebo (b) se nelze obejít: definuji $f(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(y) = 0$ pro $y \neq 0$ a $g(0) = 1$. Potom $f(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow 0$, $g(y) \rightarrow 0$ pro $y \rightarrow 0$, avšak $g(f(x)) \rightarrow 1$ pro $x \rightarrow 0$.

Poznámka. Výrok $f(x) \rightarrow \infty$ pro $x \rightarrow x_0$ můžeme ekvivalentně napsat jako

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) > K].$$

Podobně $f(x) \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow x_0$ je ekvivalentní

$$(\forall L < 0)(\exists \delta > 0)[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) < L].$$

Věta 2.7. (Aritmetika limit - obecná verze.) Nechť $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow B$ pro $x \rightarrow x_0$, kde $A, B \in \mathbb{R}^*$. Potom

(1) $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$

(2) $f(x) - g(x) \rightarrow A - B$

(3) $f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$

(4) $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$

pro $x \rightarrow x_0$, má-li výraz napravo smysl.

Příklady. ① $\frac{1}{x^2+1} \rightarrow \frac{1}{\infty \cdot \infty + 1} = 0$ pro $x \rightarrow \infty$

② $x^3 + 3x^2 + 4 = x^3(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}) \rightarrow (-\infty)^3(1 + \frac{3}{-\infty} + \frac{4}{(-\infty)^3}) = -\infty$ pro $x \rightarrow -\infty$

Poznámka. Proč nedefinuji některé výrazy, např. $\frac{\infty}{\infty}$? Protože když $f(x) \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow \infty$, nelze obecně říci, co dělá $\frac{f(x)}{g(x)}$. - Operace s ∞ jsou definovány právě tak, aby platila Věta 2.7.

Věta 2.8. Nechť $f(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0$.

(1) Je-li navíc $f(x) > 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$ pro $x \rightarrow x_0$.

(2) Je-li naopak $f(x) < 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow x_0$.

Příklady. ① $\frac{\sin\sqrt{x}}{x} \rightarrow \infty$ pro $x \rightarrow 0+$

② $\frac{1}{x+x^2} \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow 0-$

Věta 2.9. (Zachování nerovnosti v limitě.) Nechť $f(x) \rightarrow a$ pro $x \rightarrow x_0$. Nechť existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \leq A$ na jistém $P(x_0)$. Potom $a \leq A$.

Poznámky. • platí zrcadlová verze s \geq místo \leq

• neplatí verze s ostrou nerovností: $f(x) = 1 - \frac{1}{x} < 1$ na $P(\infty)$, avšak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \not< 1$

• souhrně: neostrá nerovnost se v limitě zachová, ostrá se může změnit v rovnost

Věta 2.7. (O dvou policajtech.) Nechť $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ jsou definovány na jistém $P(x_0)$.

(1) Nechť $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ platí na jistém $P(x_0)$, a nechť $g(x) \rightarrow a$, $h(x) \rightarrow a$ pro $x \rightarrow x_0$, kde $a \in \mathbb{R}$. Potom $f(x) \rightarrow a$ pro $x \rightarrow x_0$.

(2) Nechť $g(x) \leq f(x)$ na na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \rightarrow \infty$ pro $x \rightarrow x_0$. Potom $f(x) \rightarrow \infty$ pro $x \rightarrow x_0$.

(3) Nechť $f(x) \leq h(x)$ na na jistém $P(x_0)$, nechť $h(x) \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow x_0$. Potom $f(x) \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow x_0$.

Příklady. ① $\frac{x^2+1}{\lfloor x^2 \rfloor + 1} \rightarrow 1$ pro $x \rightarrow \infty$, kde

$$\lfloor y \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq y\}$$

je tzv. celá část y .

② $\cos x + x \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow -\infty$

Věta 2.11. Nechť $f(x)$ je monotónní v intervalu (a, b) . Potom existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$), kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v x_0 zprava (resp. zleva), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) [x \in U_+(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)]$$

respektive

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) [x \in U_-(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)].$$

Ekvivalentní zápisy (pro spojitost zprava):

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) [f(U_+(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)]$$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) [x_0 \leq x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Věta 2.12.

- (1) $f(x)$ je spojitá v x_0 zprava, právě když $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$.
- (2) $f(x)$ je spojitá v x_0 zleva, právě když $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$.
- (3) $f(x)$ je spojitá v x_0 , právě když je tam spojitá zleva i zprava.

Příklad. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ je v 0 spojitá zprava, nespojitá zleva.

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v I (na I), jestliže pro každé $x_0 \in I$ platí:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in U(x_0, \delta) \cap I \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)].$$

Poznámka. U intervalu rozlišujeme vnitřní a krajní body. Bod $x_0 \in I$ je vnitřní, právě když existuje $\delta > 0$ tak, že $U(x_0, \delta) \subset I$. Krajní bod může, ale nemusí být prvkem intervalu.

Tedy (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ a $[a, b]$ jsou intervaly s krajními body a, b . Vnitřními body jsou ve všech čtyřech případech body z (a, b) .

Věta 2.13. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) $f(x)$ je spojitá v I
- (2) $f(x)$ je spojitá v každém vnitřním bodě I ; pokud levý krajní bod je prvkem I , je v něm spojitá zprava; pokud pravý krajní bod je prvkem I , je v něm spojitá zleva
- (3) $f(x)$ je spojitá zprava v každém bodě I , který není pravý krajní, a je spojitá zleva v každém bodě I , který není levý krajní

Věta 2.14. Nechť $f(x), g(x)$ jsou spojitě v intervalu I . Potom funkce $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ jsou spojitě v I . Jestliže $g(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$, je také funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v I .

Věta 2.15. (Spojitost superpozice.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I , nechť $g(y)$ je spojitá v J , kde $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly. Nechť $f(I) \subset J$. Potom funkce $(g \circ f)(x)$ je spojitá v I .

Poznámka. Ihned z definice plyne: je-li $f(x)$ spojitá v I , a $\tilde{I} \subset I$, pak $f(x)$ je spojitá v \tilde{I} .

Věta 2.16. (Darbouxova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I , kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť γ leží mezi $f(a), f(b)$, kde $a, b \in I$. Potom mezi a, b leží c takové, že $f(c) = \gamma$.

Poznámka. Větu A4 lze zobecnit takto: Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná. Potom existuje $S \in \mathbb{R}^*$ tak, že $S = \sup M$.

Lemma 2.2. (Charakterizace intervalu.) Nechť neprázdná $M \subset \mathbb{R}$ má následující vlastnost:

[*] Jsou-li $\alpha, \beta \in M$ a číslo γ leží mezi α a β , pak také $\gamma \in M$.
Potom M je interval.

Důsledek. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f(I)$ je také interval. (Spojitý obraz intervalu je interval.)

Věta 2.17. (O inverzní funkci.) Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v I . Označ $J = f(I)$. Potom J je interval, $f(x) : I \rightarrow J$ je vzájemně jednoznačná a $f_{-1}(y) : J \rightarrow I$ je spojitá a ryze monotónní.

Důsledek. Důkaz Věty B (o odmocnině), navíc dostáváme, že $\sqrt[n]{x}$ je pro sudé n spojitá v $[0, \infty)$, pro liché n je spojitá v \mathbb{R} .

Lemma 2.3. (1) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(\infty)$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(1/y).$$

(2) Nechť $f(x)$ je definována na jistém $P(-\infty)$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(1/y).$$

Rovnost chápu takto: existuje-li jedna limita, existuje i druhá a rovnají se.

Poznámky. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Funkci $F(x) : I \rightarrow \mathbb{C}$ ztotožním s dvojicí funkcí $f_1(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, kde $F(x) = f_1(x) + if_2(x)$, neboli $f_1(x) = \operatorname{Re} F(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} F(x)$.

Limitu definuji takto: $F(x) \rightarrow A \in \mathbb{C}$ pro $x \rightarrow x_0$, jestliže $\operatorname{Re} F(x) \rightarrow \operatorname{Re} A$, $\operatorname{Im} F(x) \rightarrow \operatorname{Im} A$ pro $x \rightarrow x_0$.

Spojitosť analogicky: $F(x)$ je spojitá (v bodě, na intervalu), jestliže funkce $\operatorname{Re} F(x)$, $\operatorname{Im} F(x)$ jsou spojité.

Tímto přechodem k reálné resp. imaginární části dokážeme např. zobecnění Věty 2.3. pro $A, B \in \mathbb{C}$.