1. Úvod. Reálná čísla.

Věta A1. (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}$.) Existuje množina reálných čísel $\mathbb{R}$, která obsahuje prvky 0 a 1, a jsou na ní definovány operace '$\cdot$' (násobení) a '$+$' (sčítání) tak, že platí (pro $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$):
(i) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
(iv) $0 + x = x$, $1 \cdot x = x$
(v) $0 \cdot x = 0$ a naopak: $x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$
(vi) $\forall x, z\ \exists! y$ tak, že $x + y = z$, toto y značíme $z - x$
(vii) $\forall z$, $\forall x \neq 0\ \exists! y$ tak, že $x \cdot y = z$, toto y značíme z/x

Věta A2. (Uspořádání $\mathbb{R}$.) Na množině $\mathbb{R}$ je definována relace '$<$' (menší než) tak, že platí (pro $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$):
(i) nastane právě jedna z možností: $x = y$ nebo $x < y$ nebo $y < x$
(ii) $x < y\ \&\ y < z \implies x < z$
(iii) $x < y \implies x + z < y + z$
(iv) $0 < x\ \&\ 0 < y \implies 0 < x \cdot y$

Definice. (Význačné podmnožiny $\mathbb{R}$.)
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (přirozená čísla)
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ (celá čísla)
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ (racionální čísla)
$(a, b) = \{x;\ a < x < b\}$
$[a, b] = \{x;\ a \leq x \leq b\}$
$(a, b] = \{x;\ a < x \leq b\}$
$[a, b) = \{x;\ a \leq x < b\}$
$(a, +\infty) = \{x;\ x > a\}$
$[a, +\infty) = \{x;\ x \geq a\}$

Definice. Pro $x \in \mathbb{R}$ definuji $|x|$ (absolutní hodnota x) jako

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Lemma 1.1. Nechť $a \geq 0$. Potom $|x| \leq a$ právě když $-a \leq x \leq a$.

Věta 1.1. (Trojúhelníková nerovnost.) Pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí:
(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$
(ii) $|x - y| \leq |x| + |y|$
(iii) $|x + y| \geq ||x| - |y||$
(iv) $|x - y| \geq ||x| - |y||$

Definice. (Odmocnina.)
1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé a $a \geq 0$. Potom existuje jednoznačně určené $b \geq 0$ tak, že $b^n = a$. Značíme $b = \sqrt[n]{a}$.
2. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché a $a \in \mathbb{R}$. Potom existuje jednoznačně určené $b \in \mathbb{R}$ tak, že $b^n = a$. Značíme $b = \sqrt[n]{a}$.

Výrok dne. Není (obecně) pravda, že $\sqrt{x^2} = x$ - to platí jen pro $x \geq 0$, pro $x < 0$ máme $\sqrt{x^2} = -x$.

Věta 1.2. Existují iracionální čísla.

Věta A3. (Vlastnosti $\mathbb{N}$.)
(i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $n > x$
(ii) (princip indukce) - Nechť $M \subset \mathbb{N}$ splňuje: (a) $1 \in M$ (b) $n \in M \implies n + 1 \in M$. Potom $M = \mathbb{N}$.

Věta 1.3. Každý otevřený interval obsahuje nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.
Prvek $x \in M$ se nazve maximum (největší prvek) M, pokud pro $\forall y \in M$ platí $y \leq x$. Značíme $x = \max M$.
Prvek $x \in M$ se nazve minimum (nejmenší prvek) M, pokud pro $\forall y \in M$ platí $y \geq x$. Značíme $x = \min M$.
Číslo K se nazve horní odhad M, pokud pro $\forall x \in M$ platí $x \leq K$.
Číslo L se nazve dolní odhad M, pokud pro $\forall x \in M$ platí $x \geq K$.
Množina se nazve shora omezená, má-li nějaký horní odhad; zdola omezená, má-li nějaký dolní odhad; omezená, je-li omezená shora i zdola.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo S se nazve supremum množiny M, značíme $S = \sup M$, jestliže
(i) $\forall x \in M$ platí $x \leq S$
(ii) $\forall S' < S\ \exists y \in M$ tak, že $y > S'$
Číslo s se nazve infimum množiny M, značíme $s = \inf M$, jestliže
(i) $\forall x \in M$ platí $x \geq s$
(ii) $\forall s' > s\ \exists y \in M$ tak, že $y < s'$

Věta A4. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená. Potom existuje $S \in \mathbb{R}$ tak, že $S = \sup M$.

Věta A4'. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a zdola omezená. Potom existuje $s \in \mathbb{R}$ tak, že $s = \inf M$.

Definice. (Komplexní čísla.) Symbolem $\mathbb{C}$ značíme množinu všech čísel tvaru $x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a i je imaginární jednotka (platí $i^2 = -1$.) Je-li $z = x + iy$, píšeme $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ (reálná, resp. imaginární část z).

Definice. (Rozšířená reálná čísla.) Klademe $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{(+)\infty, -\infty\}$. Uspořádání a početní operace s prvky $\pm\infty$ definujeme takto:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $-\infty < x < \infty$, dále $-\infty < \infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $x + \infty = \infty$, $x - \infty = -\infty$, dále $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$
- $\forall x > 0$ je $x \cdot \infty = \infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$, dále $\infty \cdot \infty = \infty$
- $\forall x < 0$ je $x \cdot \infty = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = \infty$, dále $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $\dfrac{x}{\infty} = 0$, $\dfrac{x}{-\infty} = 0$

Nedefinováno zůstává: $\infty - \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\dfrac{x}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.