

Elementární modely v matematické biologii

Dalibor Pražák

Katedra matematické analýzy MFF UK

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/>

Elementární modely:

- jednoduché odvození
- jednoduchá analýza
- možno kombinovat do složitějších modelů
- překvapivě dobrá shoda s reálnými daty
- lze na nich demonstrovat obecné principy

Základní růstový model.

$x = x(t)$ velikost populace x v čase t

$$x(t+1) = x(t) + r \cdot x(t) = (1+r) \cdot x(t)$$

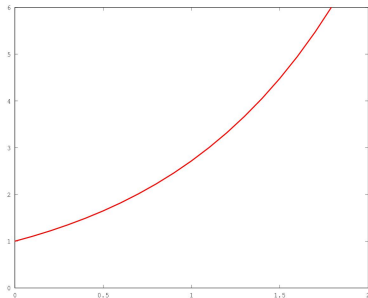
$$x(t+\tau) = (1-\tau) \cdot x(t) + \tau(1+r) \cdot x(t)$$

$$\frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = r \cdot x(t) \quad \dots \tau \text{ nekonečně malé}$$

$$x'(t) = r \cdot x(t)$$

parametr modelu: $r > 0$... přirozená míra růstu

Exponenciální růst.



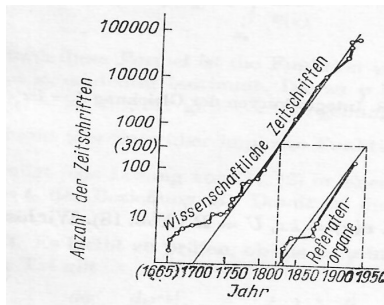
$$x'(t) = r \cdot x(t)$$

$$x(0) = x_0$$

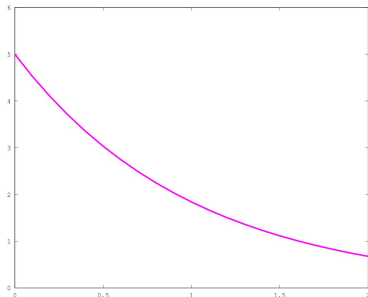
$$\Rightarrow x(t) = x_0 \exp(rt)$$

Obrázek:

růst vědeckých časopisů
na úsvitu novověku



Varianta: exponenciální pokles



$$x'(t) = -h \cdot x(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$\implies x(t) = x_0 \exp(-ht)$$

Pozn. Střední očekávaná délka života: $\frac{1}{h}$

v čase t až $t + \tau$ uhynie $e^{-ht} - e^{-h(t+\tau)} = -de^{-ht}$

do průměru přičteme $-de^{-ht} \cdot t$

celkový průměr je „součet“ $\int_0^\infty -de^{-ht} \cdot t = \int_0^\infty e^{-ht} \cdot dt = \frac{1}{h}$

Základní model – shrnutí.

$$x'(t) = a \cdot x(t)$$

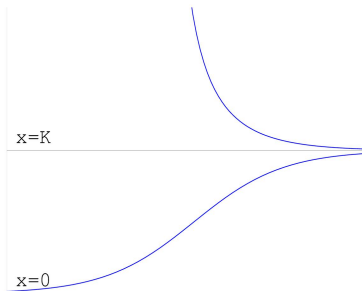
kde mohou nastat tyto situace:

$a > 0$. . . růst populace

$a < 0$. . . úbytek populace

$a = 0$. . . stacionární stav

Logistický (Verhulstův) model



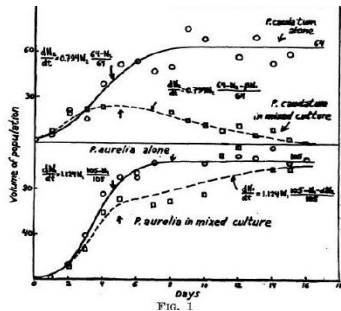
$$x'(t) = r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) \cdot x(t)$$

r ... přirozená míra růstu

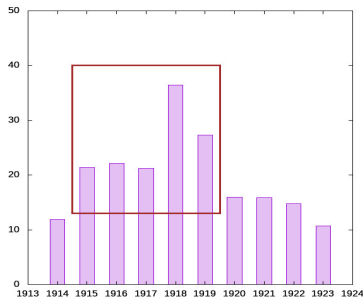
K ... kapacita prostředí

G.F. Gause:

The struggle for existence.
(1934)



d'Anconův problém



Umberto d'Ancona:
nárůst **podílu** žraloků
Středozemní moře
1915-19

⇒ problém vzájemné dynamiky „dravec-kořist“

Vito Volterra

Lotka-Volterrův model

$x = x(t)$ sledi (kořist)

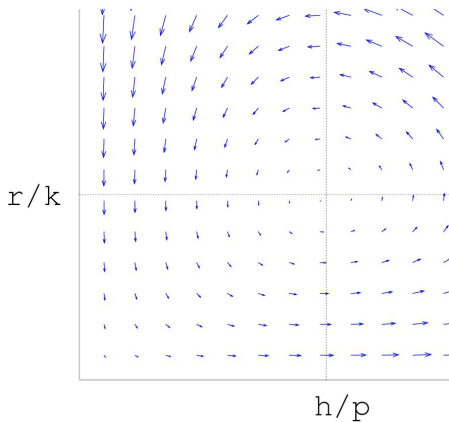
$y = y(t)$ žraloci (dravec)

$$x'(t) = a \cdot x(t) \quad \text{kde } a = r - ky(t)$$

$$y'(t) = b \cdot y(t) \quad \text{kde } b = -h + px(t)$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= (r - ky(t)) \cdot x(t) \\ y'(t) &= (-h + px(t)) \cdot y(t) \end{aligned}$$

parametry modelu: $\dots r, h, k, p$ (kladné)



$$x'(t) = (r - ky(t)) \cdot x(t)$$

$$y'(t) = (-h + px(t)) \cdot y(t)$$

stacionární body:

$$x(t) = \bar{x} = \frac{h}{p} \quad y(t) = \bar{y} = \frac{r}{k}$$

Pozoruj: horší prostředí $\dots r \searrow, h \nearrow \implies \bar{x} \nearrow, \bar{y} \searrow$

Volterrův princip

V systémech s negativní zpětnou vazbou (typu „dravec-kořist“)
vede **zhoršení prostředí** k relativnímu **poklesu počtu dravců**
a k relativnímu **nárůstu počtu kořisti**.

Lotka-Volterrův model je příliš jednoduchý . . .

Holling-Tannerův model

$$x'(t) = \left(r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{my(t)}{A + x(t)} \right) \cdot x(t)$$

$$y'(t) = s \left(1 - \frac{Py(t)}{x(t)} \right) y(t)$$

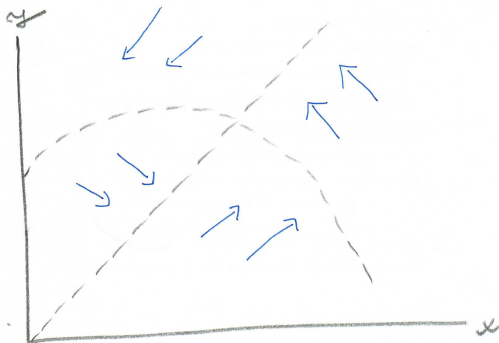
Komentář:

$r \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right)$ logistický model

$-\frac{my(t)}{A+x(t)}$ lov s nasycením dravce

$s \left(1 - \frac{Py(t)}{x(t)} \right) y(t)$ „logistický model“ – kapacita $x(t)/P$
 P ... spotřeba kořisti na 1 predátora

Holling-Tannerův model – analýza



Podm. stacionarity:

$$y = \frac{r}{m} \left(1 - \frac{x}{K}\right) (A + x)$$

$$y = \frac{x}{P}$$

Volterrův princip ... platí i zde!

Zhoršení prostředí $\Rightarrow P \nearrow \Rightarrow y/x \searrow$

Výhled: geometrický aspekt problému

Další modely, problémy a principy

- problémy konkurence (princip konkurenčního vyloučení)
- šíření infekčních nemocí v populaci (SIR modely)