Cvičení na Šturmovu větu.

1. Nechť $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Určete funkci $u = u(x)$ tak, aby při substituci $y = uz$ měla rovnice pro $z(x)$ tvar $z'' + Q(x)z = 0$. Vyjádřete $Q(x)$ pomocí $p(x)$, $q(x)$.

2. Nulové body každého netriviálního řešení rovnice $y'' + py' + qy = 0$ tvoří izolovanou množinu.

3. Nechť $y = y(x)$ je netriviální řešení rovnice $y'' + p(x)y = 0$, $a > 0$ je pevné číslo.

   (a) Jestliže $p(x) \geq a$, pak sousední nulové body y jsou vzdáleny nejvýše $\pi/\sqrt{a}$.

   (b) Jestliže $p(x) \leq a$, pak sousední nulové body y jsou vzdáleny alespoň $\pi/\sqrt{a}$.

4. Každé řešení rovnice $y'' + \frac{1}{1+\sqrt{x}}y = 0$ má v intervalu $(0, +\infty)$ nekonečně nulových bodů.

5. Každé netriviální řešení rovnice $y'' + \frac{1}{4(x^2+1)}y = 0$ má v intervalu $(0, +\infty)$ nejvýše konečně nulových bodů.

6. Každé řešení rovnice $y'' + \frac{1}{x^2+1}y = 0$ má v intervalu $(0, +\infty)$ nekonečně nulových bodů.

7. Libovolné netriviální řešení rovnice $y'' - xy' + y = 0$ má v R nejvýše pět nulových bodů.

8. Uvažujte rovnici $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ pro $x \in (0, +\infty)$, $n \geq 0$.

   (a) Proveďte substituci $y = x^{-1/2}z$.

   (b) Je-li $n \leq 1/2$, jsou sousední nulové body řešení blíže než π.

   (c) Je-li $n \geq 1/2$, jsou sousední nulové body (netriviálního) řešení dále než π.

   (d) V každém okolí nekonečna má každé netriviální řešení nekonečně nulových bodů. Vzdálenost sousedních se blíží k π pro $x \to +\infty$.

9. Elementárními úvahami (tj. bez použití srovnávací věty) ukažte, že pokud $a(x) \geq 0$, tak netriviální řešení rovnice $y'' + ay = 0$ má nejvýše jeden nulový bod.