OBÁLKA

Definice. Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ se nazve *křivkou*, pokud ke každému bodu γ existuje okolí U, otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$ a parametrizující funkce ξ, $\eta : I \to U$ takové, že $\gamma \cap U = \{(\xi(t), \eta(t)) : \ t \in I\}$.
Od parametrizujících funkcí žádáme, aby byly spojitě diferencovatelné a aby vektor (ξ', η') byl nenulový. Tento vektor je směrnicí tečny – tečna nezávisí na zvolené parametrizaci.

Říkáme, že křivky se ve společném bodě *dotýkají*, pokud v něm mají stejnou tečnu.

Priklady. Graf každé C^1 funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je křivkou. Obecněji, je-li $F = F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1 funkce taková, že na množině $\Gamma := \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ je vektor $(\frac{\partial}{\partial x}F, \frac{\partial}{\partial y}F)$ nenulový, je množina Γ křivkou ve smyslu výše uvedené definice díky větě o implicitní funkci. Vektor $(\frac{\partial}{\partial x}F, \frac{\partial}{\partial y}F)$ je v každém bodě této křivky kolmý k její tečně.

Definice. Nechť je dán systém křivek $\{\gamma_c\}_{c\in J}$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je interval. Křivka ψ se nazve *obálkou* systému $\{\gamma_c\}_{c\in J}$, pokud (a) v každém svém bodě se křivka ψ dotýká některé křivky z $\{\gamma_c\}_{c\in J}$ a (b) každá křivka z $\{\gamma_c\}_{c\in J}$ se alespoň v jednom bodě dotýká křivky ψ.

Priklad. Obálkami systému kružnic $(x-c)^2 + y^2 = 1$, $c \in \mathbb{R}$ jsou přímky $y = 1$, $y = -1$, ale také jejich sjednocení (které je křivkou ve smyslu naší definice). Obálkou však nejsou jednotlivé kružnice – nesplňují bod (b).
Systém křivek nemusí obecně mít obálku: stačí uvážit přímky $y = c$, $c \in \mathbb{R}$.

V dalším budeme předpokládat, ze křivky $\{\gamma_c\}_{c\in J}$ jsou zadány implicitně rovnicemi $F(x,y,c) = 0$, kde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je C^1 funkce.
Ukážeme, že za určitých předpokladů je nutnou a postačující podmínkou toho, aby daný bod ležel na obálce, současné splnění rovnic

$$F(x,y,c) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial c}F(x,y,c) = 0 \tag{2}$$

To nám dále umožní formulovat jednoduchou postačující podmínku, zaručující lokální existenci obálky.

Tvrzení 1. Nechť je dán otevřený interval V a funkce ξ, $\eta : V \to \mathbb{R}^2$, parametrizující jistou křivku ψ. Pak jsou nasledující tvrzení ekvivalentní:
(I) Křivka ψ je obálkou systému křivek $\{\gamma_c\}_{c \in V}$, přičemž křivky ψ, γ_c se dotýkají v bodě $(\xi(c), \eta(c))$.
(II) Body $(\xi(c), \eta(c), c)$ splňují pro každé $c \in V$ rovnice (1), (2).

Důkaz: Zřejmě $F(\xi(c), \eta(c), c) = 0 \ \forall c \in V$ je ekvivalentní tomu, že body $(\xi(c), \eta(c))$ křivky ψ leží zároveň na křivkách γ_c. Derivováním dle c máme

$$\begin{aligned} 0 = &\left\{ \frac{\partial}{\partial x} F(\xi(c), \eta(c), c) \cdot \xi'(c) + \frac{\partial}{\partial y} F(\xi(c), \eta(c), c) \cdot \eta'(c) \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial c} F(\xi(c), \eta(c), c) \end{aligned} \tag{3}$$

pro každé $c \in V$. Protože vektor $(\frac{\partial}{\partial x}F, \frac{\partial}{\partial y}F)$ je kolmý na tečnu křivky γ_c, je výraz ve složené závorce roven nule prave tehdy, když se křivky ψ a γ_c v daném bodě dotýkají, což podle (3) nastává právě tehdy, když je splněna rovnice (2).

Tvrzení 2. Nechť body x_0, y_0 a c_0 vyhovují rovnicím (1), (2). Nechť navíc funkce F je C^2 a nechť matice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}$$

kde $G = \frac{\partial}{\partial c} F$ je v bodě (x_0, y_0, c_0) regulární. Pak existuje okolí V bodu c_0 takové, že systém $\{\gamma_c\}_{c \in V}$ má obálku, procházející bodem (x_0, y_0).

Důkaz: dle věty o implicitní funkci existuje okolí V bodu c_0 a C^1 funkce ξ, $\eta : V \to \mathbb{R}^2$ takové, že body $(\xi(c), \eta(c), c)$ vyhovují pro každé $c \in V$ rovnicím (1), (2). Dle předchozího tvrzení jsou ξ, η parametrizacemi hledané obálky.