Připomeňme, že funkce $u(t) : [t_0, t_1] \to V$ se nazve ,,mírné řešení" (m.ř.) úlohy (A) $\dot{u} = Au + f(u)$ na intervalu $[t_0, t_1]$, jestliže $u \in C([t_0, t_1]; V)$ a je splněna integrální identita

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(u(s)) ds, \qquad \forall\ t \in [t_0, t_1]$$

Příklad 1. Je-li u m.ř. na intervalu $[t_0, t_1]$, je $u|_{[\tau, t_1]}$ m.ř. na intervalu $[\tau, t_1]$. Dále $u(\cdot - h)$ je m.ř. na intervalu $[t_0 + h, t_1 + h]$.
1b – obráceně: je-li u m.ř. na $[t_0, \tau]$, $\tilde{u}$ m.ř. na $[\tau, t_1]$ a platí $u(\tau) = \tilde{u}(\tau)$, pak dodefinováním u jako $\tilde{u}$ na $(\tau, t_1]$ vzniká m.ř. na celém $[t_0, t_1]$.

Příklad 2. Přímo z definice m.ř. dokažte: Nechť u, v jsou m.ř. na intervalu $[0, T]$, nechť $u(0) = v(0)$. Pak $u = v$ na celém $[0, T]$.

Příklad 3. Předpokládejme situaci jako v Domácím úkolu číslo 5 (s tím rozdílem, že bereme $-A$ místo A). Označme $\| \cdot \|$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ normu a skalární součin v X, označme dále $V^{2\alpha} = D((-A)^\alpha)$.
Nechť $u \in C^1(0, T; V^{2\beta}) \cap C(0, T; V^{4\alpha - 2\beta})$, přičemž $2\alpha \ge \beta \ge 0$. Dokažte, že

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \|(-A)^\alpha\|^2 = \langle (-A)^\beta \dot{u}, (-A)^{2\alpha - \beta} u \rangle$$

pro všechna $t \in (0, T)$.
3b – Napište uvedenou identitu v co nejvíce ,,konkrétní" podobě pro speciální případ Dirichletova laplaciánu (Poznámka 7.0) s volbou $\beta = 0$ a $\alpha = 0$ či $\alpha = 1/2$.

Nápověda.
2 – odhady ve Větě 7.1. Nejprve pro malé $T > 0$; nebo rovnou pro velké ??
3 – $\langle (-A)^a u, v \rangle = \langle u, (-A)^a v \rangle$ (proč?) – mají-li obě strany smysl