Série 8 – deadline 3.5.2012

Příklad 1. Při značení Poznámky 7.0 („Dirichletův laplacián“) dokažte, že funkce ω_j tvoří úplný OG systém též vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle\langle u, v\rangle\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$.
1b. Ukažte, že pro $u \in W_0^{1,2}$ je $\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \sum_j \lambda_j c_j^2$, kde $c_j = \langle u, \omega_j\rangle$.
1c. Ukažte obráceně, že pokud $u \in L^2$ a výše uvedená suma konverguje, pak nutně $u \in W_0^{1,2}$.
1d. Ukažte podobně, že $u \in D(A)$ právě když $\sum_j \lambda_j^2 c_j^2$ konverguje; a za těchto předpokladů $Au = \sum_j \lambda_j c_j \omega_j$.

Příklad 2. Ukažte, že operátor $(u, v) \mapsto u^2 v$ je lokálně lipschitzovský z $W^{1,2} \times W^{1,2}$ do L^2. Jsme na omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 3$.

Nápověda.
1 – uvažte, že $\langle\langle \omega_j, \varphi\rangle\rangle = \lambda_j \langle \omega_j, \varphi\rangle$
1b – Parsevalova rovnost pro předchozí OG systém
1c – označte $u^N = \sum_j c_j \omega_j$. *Potom* $u^N \to u$ *(jak?) a* ∇u^N *je cauchyovská (kde a proč?)*
1d – díky „výsledku o regularitě“ nutně $\omega_j \in D(A)$*; tedy snadno pro konečné sumy a pak limita*
2 – užijte vnoření $W^{1,2} \hookrightarrow L^6$ *(platí pro* $d \le 3$*), pomocnou nerovnost (dokažte!)* $|u_1^2 v_1 - u_2^2 v_2| \le c(|u_1|^2 + |v_1|^2)|u_1 - v_1|$ *a také zobecněnou Hölderovu nerovnost (nedokazujte)* $\|fgh\|_{L^p} \le \|f\|_{L^q}\|g\|_{L^r}\|h\|_{L^s}$, *pokud* $p^{-1} = q^{-1} + r^{-1} + s^{-1}$