Příklad 1. Mírné řešení splňuje

$$\frac{d}{dt}\|u\|_V^2 + c_1\|Au\|_H^2 \le c_2$$

Ukažte odsud, že uzavřená koule

$$W = \{\|u\|_V \le R\}$$

je uniformně pohlcující (tj. $u(t) \in W$ pro všechna $t \ge t_0$, kde t_0 závisí pouze na $\|u(0)\|_V$) a pozitivně invariantní (tj. $u(0) \in W$ implikuje $u(t) \in W$ pro všechna $t \ge 0$.

Příklad 2. Buď X, Y Banachovy prostory, buď $f : X \to Y$ lokálně lipschitzovská, buď $R > 0$ dáno. Sestrojte $\tilde{f} : X \to Y$ omezenou, globálně lipschitzovskou, splňující $\tilde{f}(x) = f(x)$ pokud $\|x\|_X \le R$ a $f(x) = 0$ pro $\|x\|_X \ge 2R$.

Příklad 3. Předpokládejme situaci na začátku důkazu Věty 8.1: $\phi \in \mathcal{F}_{n,\ell}$ je dáno, $\mathcal{M}$ je graf ϕ, $\mathcal{M}_t := \mathcal{S}(t)\mathcal{M}$, a konečně $\tilde{\phi}$ je funkce, jejímž grafem je $\mathcal{M}_t$. Připomeňme, že (zatím nedokazovaný) předpoklad ($\tilde{A}P3$) zaručuje, že $\mathcal{M}_t$ je grafem ℓ-lipschitzovské funkce s definičním oborem $P\mathcal{M}_t \subset PH$ a hodnotami v $QH \cap V$. Připomeňme dále, že $R(u)$ – nelinearita v rovnici ($\tilde{A}$) – je nulová vně $\Omega_\rho = \{\|u\|_V \le \rho\}$.
3a. Ukažte, že každé $p \in PH \setminus \Omega_\rho$ náleží do $P\mathcal{M}_t$ a $\tilde{\phi}(p) = 0$.
*3b. Ukažte dále, že definičním oborem $\tilde{\phi}$ je celé PH.

Lemma 8.2. Nechť X je Banachův prostor, $S(t) : X \to X$ (obecně nelineární) spojitá semigrupa, která je pro každé $t > 0$ kompaktní (tj. $\overline{S(t)B}$ je kompaktní, je-li B omezená), a konečně nechť je splněn disipativní odhad

$$\|S(t)u\|_X \le e^{-at}\|u\|_X + K_0, \qquad t \ge 0$$

(s jistými konstantami a, $K_0 > 0$.) Dokažte, že existuje stacionární bod (tj. u_0 takové, že $S(t)u_0 = u_0$ pro každé $t \ge 0$).

Nápověda.
1 – $\|Au\|_V \geq \lambda_1^{1/2}\|u\|_V$; *integrační faktor* $\exp(\mu t)$ *pro vhodné* $\mu > 0$.
2 – *viz případ* $X = Y = \mathbb{R}$
3a – *Uvědomte si, že* $\mathcal{S}(t) = e^{tA}$ *vně* Ω_ρ, *kde* A *je diagonální s vlastními čísly* $0 > -\lambda_1 \geq -\lambda_2 \geq \dots$
3b – *Stačí ukázat, že* $F : PH \to PH$, *definované předpisem* $F(p) := e^{-tA}P\tilde{\phi}(p)$, *je na. Dle předchozího je* F *identita na* $PH \setminus \Omega_\rho$; *ukažte z Brouwerovy věty, že* F *musí zobrazovat* $PH \cap \Omega_\rho$ *(fakticky uzavřenou kouli v* $\mathbb{R}^n$*) na sebe.*
4 – *pomocí Schaeferovy věty (Pata, Theorem 1.20) nejprve ukažte, že* $S(\tau)$ *má pevný bod pro libovolné* $\tau > 0$ *pevné. Posloupnost* u_n *pevných bodů* $S(2^{-n})$ *má hromadný bod (proč?); označme jej* u_0 $\dots$