Domácí úkol č. 7 - Vlastnosti analytických semigrup

termín odevzdání: úterý 24.4.

Buď $a > 0$ a $(A, D(A))$ generátor analytické semigrupy splňující

$$\|R(\lambda, A)\| \leq M|\lambda + a|^{-1} \text{ pro } \lambda + a \in \Sigma_{\pi/2+\varphi}.$$

Připomeňme, že pro $\alpha > 0$ definujeme

$$(-A)^{-\alpha} := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (-z)^{-\alpha} R(z, A) \, \mathrm{d}z,$$

kde $\gamma(t) := -\frac{a}{2} + te^{i(\pi/2+\varphi)\operatorname{sgn} t}$, $t \in \mathrm{R}$.

1. Ukažte, že pro $\alpha = n \in \mathrm{N}$ je $(-A)^{-n} = (R(0, A))^n$ (deformujte integrační křivku na kružnici a použijte reziduovou větu).

2. Ukažte, že pro $0 < \alpha \leq 1$ je

$$(-A)^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} R(t, A) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} T(t) \, \mathrm{d}t.$$

Návod: ohněte integrační křivku shora i zdola na kladnou reálnou poloosu, k důkazu druhé rovnosti využijte identitu $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin \pi z$.

3. Ukažte pomocí křivkového integrálu pro semigrupu, že existuje $C > 0$ takové, že $\|AT(t)\| = \|d/dt T(t)\| \leq Ct^{-1}e^{-at}$ pro všechna $t > 0$.

4. Ukažte, že pro každé $m \in \mathrm{N}$ existuje $C_m > 0$ takové, že $\|T(t)\|_{L(X,V^{2m})} = \|A^m T(t)\| \leq Ct^{-m}e^{-at}$ pro všechna $t > 0$.

Nyní dokážeme první dvě části Lemmatu 6.5 z přednášky:

5. S pomocí částí 2 a 4 ukažte, že pro každé $r \in \mathrm{R}$ existuje $C_r > 0$ takové, že $\|T(t)\|_{L(X,V^{2r})} \leq Ct^{-r}e^{-at}$ pro všechna $t > 0$. (identitu $(-A)^\alpha(-A)^\beta = (-A)^{\alpha+\beta}$, α, $\beta \in \mathrm{R}$ na vhodném definičním oboru použijte bez důkazu)

6. Ukažte, že pro každé $\alpha \in (0, 1]$ existuje $K_\alpha > 0$ takové, že $\|T(t)x - x\| \leq K_\alpha t^\alpha \|(-A)^\alpha x\|$ pro všechna $t > 0$, $x \in V^{2\alpha}$. (použijte $T(t)x - x = \int_0^t AT(s)x \, \mathrm{d}s$)