Komentář k domácímu úkolu č. 7

Do zadání se vloudilo několik chyb. Odhady v 3., 4. a 5. části úkolu neplatí s číslem a ze zadání, ale jen pro všechna $\tilde{a} > a$. Hlavní informace, kterou nám odhady dávají, je ale chování semigrupy pro $t \to 0$ a tam na hodnotě exponenciály nezáleží. Další chyba je v zadání 5. části, kde mělo být $r \geq 0$ namísto $r \in \mathrm{R}$.

Řešení 5. části:

Pro $r = 0$ už je tvrzení dokázáno, nechť tedy $r > 0$. Buď $m := \lfloor r \rfloor + 1 \in \mathrm{N}$ a $\sigma := m - r \in (0, 1]$. Pak s využitím 2. části úkolu máme

$$(-A)^r T(t) = (-A)^{-\sigma}(-A)^m T(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{+\infty} s^{\sigma-1} T(s)(-A)^m T(t) \,\mathrm{d}s.$$

Použijeme-li odhad ze čtvté části úkolu, dostaneme

$$\|T(t)\|_{L(X,V^{2r})} \leq \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{+\infty} s^{\sigma-1} \|(-A)^m T(t+s)\| \,\mathrm{d}s \leq \frac{C}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{+\infty} s^{\sigma-1} (t+s)^{-m} e^{-\tilde{a}(t+s)} \,\mathrm{d}s.$$

Poslední integrál je možné odhadnout například takto

$$\int_0^{t/2} s^{\sigma-1}(t+s)^{-m} e^{-\tilde{a}(t+s)} \,\mathrm{d}s \leq e^{-\tilde{a}t} t^{-m} \int_0^{t/2} s^{\sigma-1} \,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sigma 2^\sigma} e^{-\tilde{a}t} t^{-(m-\sigma)} = c e^{-\tilde{a}t} t^{-r},$$

$$\int_{t/2}^{+\infty} s^{\sigma-1}(t+s)^{-m} e^{-\tilde{a}(t+s)} \,\mathrm{d}s \leq e^{-\tilde{a}t} \int_{t/2}^{+\infty} s^{-m+\sigma-1} \,\mathrm{d}s = c e^{-\tilde{a}t} t^{-m+\sigma} = c e^{-\tilde{a}t} t^{-r}.$$

Řešení 6. části:

S využitím nápovědy a 5. části úkolu máme

$$\|T(t)x - x\| \leq \int_0^t \|(-A)T(s)x\| \,\mathrm{d}s = \int_0^t \|(-A)^{1-\alpha} T(s)(-A)^\alpha x\| \,\mathrm{d}s$$

$$\leq C \int_0^t s^{\alpha-1} e^{-\tilde{a}s} \|(-A)^\alpha x\| \,\mathrm{d}s \leq K_\alpha t^\alpha \|(-A)^\alpha x\|.$$