Domácí úkol č. 5 - Zlomkové mocniny operátorů

termín odevzdání: úterý 10.4.

Buď $(-A, D(A))$ samoadjungovaný disipativní operátor na Hilbertově prostoru X a U a m jako ve spektrální větě. Definujme pro $\alpha \geq 0$

$$A^\alpha x := U^{-1}[m^\alpha \cdot Ux], \quad D^\alpha := D(A^\alpha) := U^{-1}(\{f \in L^1_{loc} :\ (1+m^\alpha)f \in L^2\}).$$

Definujme dále A_α jako takové zúžení operátoru A, aby $D(A_\alpha) = D^{\alpha+1}$ (tj. $A_0 = A$).

1. Ukažte, že pro každá α, $\beta \geq 0$ je $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta}$ včetně rovnosti definičních oborů. Přesněji, $x \in D^{\alpha+\beta}$, právě když $x \in D^\beta$ a $A^\beta x \in D^\alpha$.

2. Ukažte, že pro každé $\alpha \geq 0$ je $A_\alpha : D^{\alpha+1} \to D^\alpha$ omezený operátor.

3. Ukažte, že pro každé $\alpha \geq 0$ generuje operátor $(-A_\alpha, D^{\alpha+1})$ C_0-semigrupu kontrakcí na D^α.

4. Ukažte, že pokud je $0 \in \rho(A)$, pak jsou všechny operátory A_α (a také příslušné semigrupy T_α) navzájem podobné.

Návod: ukažte pro multiplikativní operátory na L^2 a poté použijte spektrální větu.