Domácí úkol č. 4 - Operátory s kompaktní rezolventou

termín odevzdání: úterý 27.3.

Dokažte Tvrzení 4.3 z přednášky: Nechť $(A, D(A))$ je uzavřený a hustě definovaný operátor na Hilbertově prostoru X s neprázdnou rezolventní množinou. Pak platí

1. A má kompaktní rezolventu, právě když vnoření $D(A) \hookrightarrow X$ je kompaktní ($D(A)$ s grafovou normou).

2. A má kompaktní rezolventu, právě když $R(\lambda, A)$ je kompaktní pro všechna $\lambda \in \rho(A)$.

3. Nechť $\mu \in \rho(A)$. Pak

$$\sigma(R(\mu, A)) \setminus \{0\} = \{(\mu - \lambda)^{-1} : \ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

4. Nechť A je samoadjungovaný s kompaktní rezolventou. Pak $\sigma(A)$ je spočetná a pokud $\sigma(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ je nekonečná, pak $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = +\infty$.

(Řekneme, že A má kompaktní rezolventu, jestliže existuje $\lambda \in \rho(A)$ takové, že $R(\lambda, A)$ je kompaktní operátor.)