

Domácí úkol č. 3 - Je první derivace generátorem?

termín odevzdání: úterý 20.3.

Uvažujte operátory A_i , kde $A_i f = f'$, na různých podprostorech $C([0, 1])$ s různými definičními obory:

1. Nechtě

$$X_1 := C([0, 1]), \quad D(A_1) := C^1([0, 1]).$$

Ukažte, že $\lambda - A_1$ nikdy není prostý (definiční obor je moc velký), a tedy A_1 není generátorem C_0 -semigrupy (proč?).

2. Nechtě

$$X_2 := C([0, 1]), \quad D(A_2) := \{f \in C^1([0, 1]), f'(1) = 0\}.$$

Ukažte pomocí Lumer–Phillipsovy věty, že A_2 je generátorem C_0 -semigrupy.

3. Nechtě

$$X_3 := C([0, 1]), \quad D(A_3) := \{f \in C^1([0, 1]), f(1) = 0\}.$$

Ukažte, že A_3 není hustě definovaný (definiční obor je moc malý), a tedy A_3 není generátorem C_0 -semigrupy. Ukažte, že ostatní předpoklady Hille–Yosidovy věty operátor splňuje (uzavřenost, podmínku na rezolventní množinu a rezolventní odhad).

4. Ukažte, že A_3 generuje C_0 -semigrupu na uzávěru svého definičního oboru, tj.

$$X_4 := \{f \in C([0, 1]), f(1) = 0\}, \quad D(A_4) := \{f \in C^1([0, 1]), f(1) = 0, f'(1) = 0\}$$

je generátorem C_0 -semigrupy.

Rozmyslete si, jak vypadají semigrupy generované operátory A_2, A_4 .