

Domácí úkol č. 2 - klasické a mild řešení

termín odevzdání: úterý 13.3.

Nechť X je Banachův prostor a $f : [0, T] \rightarrow X$ spojitá, pak budeme integrálem rozumět Riemannův integrál, tj.

$$\int_0^T f(s) ds := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \frac{T}{n},$$

kde $\{t_i\}$ je ekvidistantní dělení $[0, T]$ (existence limity plyne ze stejnoměrné spojitosti f , podobně jako pro reálné funkce). Nechť $(A, D(A))$ je uzavřený operátor na X .

1. Ukažte, že pokud $f : [0, T] \rightarrow D(A)$ spojitá (v normě prostoru $D(A)$), pak $\int_0^T f(s) ds \in D(A)$ a $A \int_0^T f(s) ds = \int_0^T Af(s) ds$.
2. Ukažte, že každé klasické řešení homogenní rovnice $\dot{x} = Ax$ je také mild řešení.
3. Ukažte, že pokud A je omezený operátor na X , pak platí i obrácená implikace, tj. každé mild řešení je klasické.