Značíme

$$\|u\|_p = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

normu v $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Platí Hölderova nerovnost

$$\int_\Omega |uv| \, dx \le \|u\|_p \|v\|_{p'} \,,$$

jsou-li p, p' duální exponenty, tj.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \,.$$

Příklad 1 Dokažte, že

$$\||u|^a\|_p = \|u\|_{ap}^a \,,$$

pokud $ap \ge 1$.

Příklad 2 Dokažte, že

$$\|u\|_q \le |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|u\|_p \,, \qquad p \ge q \,,$$

a tudíž $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, má-li Ω konečnou míru.

Příklad 3 Dokažte interpolační nerovnost

$$\|u\|_r \le \|u\|_p^\alpha \|u\|_q^{1-\alpha} \,,$$

je-li $p \le r \le q$ a platí

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \,.$$

Příklad 4 Dokažte „nerovnost Ladyženské“: je-li $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hladká funkce s kompaktním nosičem, pak

$$\|u\|_4 \le \sqrt{2} \|u\|_2^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_2^{\frac{1}{2}} \,.$$

Nápověda:

2 – Hölder na součin $u^q \cdot 1$
3 – Hölder na $u^{\alpha r} \cdot u^{(1-\alpha)r}$
4 – trikový důkaz:

$$|u(x,y)|^2 = \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial}{\partial a} |u(a,y)|^2 \, da \le 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |u(a,y)||\nabla u(a,y)| \, da \, .$$

analogicky integrací dle y, celkem

$$|u(x,y)|^4 \le 4 \int_{-\infty}^{+\infty} |u(a,y)||\nabla u(a,y)| \, da \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,b)||\nabla u(x,b)| \, db$$

a integrujte dle x, y; Fubini, Hölder (proveďte podrobně!)