Příklad 1
Vymyslete systém

$$x' = f(x, y)$$
$$y' = g(x, y)\,,$$

který je nelineární a přesto explicitně řešitelný. Spočítejte odpovídající operátory řešení $S(t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a ověřte přímým výpočtem, že

$$S(t)S(s) = S(t+s)\,.$$

Příklad 2
Nechť $(S(t), X)$ je dynamický systém. Nechť zobrazení

$$(t, u) \mapsto S(t)u$$

je diferencovatelné. Potom existuje funkce $F : X \to X$ taková, že funkce $u(t) := S(t)u_0$ (kde $u_0 \in X$ je libovolné, pevné) je řešení diferenciální rovnice

$$\frac{d}{dt}u = F(u)\,.$$

Příklad 3
Uvažujme úlohu (vedení tepla na tyči s izolovanými konci)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad t > 0,\ x \in (0, \pi)\,, \tag{1}$$

s okrajovou podmínkou

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 \tag{2}$$

a počáteční podmínkou

$$u(0, x) = u_0(x)\,, \qquad x \in (0, \pi)\,.$$

Berme za prokázaný fakt, že funkce

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & k = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos kx & k \geq 1 \end{cases}$$

tvoří ortonormální Hilbertovskou bázi prostoru $X = L^2(0,\pi)$.
Operátory $S(t) : X \to X$ jsou definovány následovně: je-li

$$u_0 = \sum_k a_k \varphi_k\,, \qquad a_k = \int_0^\pi u_0(x)\varphi_k(x)\,dx\,, \tag{3}$$

pak

$$S(t)u_0 = \sum_k a_k \exp(-k^2 t)\varphi_k\,.$$

Obě sumy chápeme ve smyslu prostoru X.

Dokažte:

1. $(S(t), X)$ je dynamický systém
2. funkce
$$u(t,x) = \sum_k a_k \exp(-k^2 t)\varphi_k(x) \tag{4}$$
(suma chápána bodově) splňuje (1), (2).
3. co se děje pro $t \to \infty$?

Nápověda: $F(u) := \frac{d}{dt}\{S(t)u\}_{t=0}$

zápis (3) *implikuje* $\|u_0\|_X^2 = \sum_k a_k^2$;

$|a_k|$, $|\varphi_k(x)|$ *omezené* $\implies$ *řada* (4) *a všechny její derivace konvergují stejnoměrně pro* $t \geq \delta > 0$

$\lim_{t\to\infty} u$ = *průměrná hodnota* u_0