Předpokládejme situaci Věty 2.2 (o normálním tvaru Hopfovy bifurkace, Theorem 19.5 v ODR2). Na přednášce bylo ukázáno, že pro (r, μ) blízké počátku lze systém převést na tvar (v polárních souřadnicích)

$$r' = d\mu r + ar^3 + \dots \tag{1}$$
$$\theta' = \omega_0 + c\mu + br^2 + \dots \tag{2}$$

kde $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$ a $\dots$ značí členy řádu $\mu^2, \mu r^2, r^4$ a výše (které nemají vliv na následující výpočty). Přechodem k nové nezávislé proměnné θ

$$r' = \frac{d}{\omega_0} r\mu + \frac{a}{\omega_0} r^3 + \dots \tag{3}$$

kde nadále bude $r = r(\theta)$ a $r' = \frac{dr}{d\theta}$.

Bod 1. Poincarého zobrazení

$$(r_0, \mu) \mapsto P(r_0, \mu) \tag{4}$$

definujeme jako $P(r_0, \mu) = r(2\pi, r_0, \mu)$, kde ("with a slight abuse of notation") je $r(\theta) = r(\theta, r_0, \mu)$ řešení rovnice (3) s počáteční podmínkou $r(0) = r_0$.
Derivací dle počáteční podmínky a parametru ukažte, že $P_{r_0} = 1$, $P_\mu = 0$, $P_{r_0 r_0} = 0$ a dále $P_{r_0\mu} = 2\pi d/\omega_0$, $P_{r_0 r_0 r_0} = 12\pi a/\omega_0$, to vše vyčísleno v bodě $(r_0, \mu) = (0, 0)$.

Bod 2. Dle Lemmatu o vydělení je $P(r_0, \mu) = r_0 p(r_0, \mu)$, kde $p = 1$, $p_{r_0} = 0$, $p_\mu = 2\pi d/\omega_0$ a konečně $p_{r_0 r_0} = 4\pi a/\omega_0$, opět vyčísleno v bodě $(r_0, \mu) = (0, 0)$.

Bod 3. Periodické řešení odpovídá pevnému bodu Poincarého zobrazení, což pro $r_0 > 0$ vede na rovnici $p(r_0, \mu) = 1$. Dle Věty o implicitní funkci existuje pro malá $r_0 \geq 0$ křivka řešení $\mu = \tilde{\mu}(r_0)$, kde $\tilde{\mu}(0) = \tilde{\mu}'(0) = 0$ a $\tilde{\mu}''(0) = -2a/d$.

Odbočka. [Rozmyslet či dohledat v literatuře – není součástí úkolu.] Mějme diskrétní dynamický systém, určený iteracemi funkce $F(x) : I \to I$, kde I je reálný interval. Tedy orbity tohoto d.s. jsou posloupnosti

$$x_1,\ F(x_1),\ F(F(x_1)),\ \dots$$

Stacionárními body jsou zřejmě právě pevné body $F(x)$. Stacionární bod x_0 nazveme stabilní (či asymptoticky stabilní), pokud pro x_1 dost blízké x_0 se příslušný orbit od x_0 nevzdaluje (či k x_0 konverguje).
Je-li x_0 stacionární bod a $F(x)$ třídy C^1 na okolí x_0, pak postačující podmínkou asymptotické stability je $|F'(x_0)| < 1$ a postačující podmínkou nestability je $|F'(x_0)| > 1$.

Bod 4. K vyšetření stability r_0 coby pevného bodu Poincarého zobrazení $r \mapsto P(r, \tilde{\mu}(r_0))$ tedy stačí určit velikost absolutní hodnoty $(\partial P/\partial r_0)(r_0, \tilde{\mu}(r_0))$. – Pozor na to, že zde se nejprve derivuje dle r_0 a pak se dosadí $(r_0, \tilde{\mu}(r_0))$.
Pomocí předchozích výpočtů ukažte, že

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r_0}\right)(r_0, \tilde{\mu}(r_0)) = 1 + r_0 \left(\frac{\partial p}{\partial r_0}\right)(r_0, \tilde{\mu}(r_0)) \tag{5}$$

přičemž člen $(\partial p/\partial r_0)(r_0, \tilde{\mu}(r_0))$ má stejné znamení jako a/ω_0.

Bod 5. Z toho plyne, že (netriviální) pevný bod Poincarého zobrazení je asymptoticky stabilní (resp. nestabilní), právě když $a/\omega_0 < 0$ (resp. $a/\omega_0 > 0$).
Proč to není ve sporu s tím, že stabilita periodických řešení má záviset pouze na znaménku a?