TEORIE MÍRY A INTEGRÁLU

UČEBNÍ TEXT PRO MAA068

VERZE 1. 9. 2000

JAN MALÝ

Obsah

Děkuji Prof. Dr. Luďkovi Zajíčkovi, DrSc. za cenné připomínky. Děkuji studentům, zvláště Patricii Rexové a Šárce Štěpánové, za pečlivé čtení minulých verzí a pomoc při opravách.

1. Pojem míry

1.1. Množinové funkce. Nechť X je abstraktní množina a $\mathcal{G} \subset 2^X$. Značíme

$$\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty].$$

Jakákoli funkce

$$\tau : \mathcal{G} \to \overline{\mathbf{R}}$$

se nazývá *množinová funkce*. Množinové funkce se většinou používají k "měření" množin. Někdy budeme používat pro množinovou funkci značení $(\mathcal{G}, \tau)$, abychom současně uvedli i znak pro její definiční obor.

1.2. Rozšíření a zúžení množinové funkce. Nechť X je abstraktní množina, $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset 2^X$, μ je množinová funkce na $\mathcal{U}$ a ν je množinová funkce na $\mathcal{V}$. Říkáme, že ν je *rozšíření* μ, jestliže $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ a $\mu(A) = \nu(A)$ pro každou $A \in \mathcal{U}$. Naopak, množinovou funkci μ v tomto případě nazýváme *zúžením* množinové funkce ν z $\mathcal{V}$ na $\mathcal{U}$ a značíme ji $\nu\lfloor\mathcal{U}$.

Mějme třídu $\mathcal{Z}$ množinových funkcí. Množinovou funkci $(\mathcal{G}, \tau)$ budeme nazývat *nejužším prvkem* třídy $\mathcal{Z}$, jestliže je zúžením všech ostatních prvků třídy $\mathcal{Z}$. Nejužší prvek třídy množinových funkcí nemusí obecně existovat, ale pokud existuje, je určen jednoznačně (to je okamžitě vidět z definice).

1.3. Délka intervalu. Nechť $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a \le b$. Množinu

$$I \in \big\{[a,b],\ [a,b),\ (a,b],\ (a,b)\,\big\}$$

nazveme *(jednorozměrným) intervalem* a přiřadíme ji

$$\ell_1(I) = \begin{cases} b-a, & a < b, \\ 0, & a = b \end{cases} \tag{1.1}$$

(druhý případ uvažujeme zvlášť, abychom se vyhnuli nepříjemnostem s rozdílem $\infty - \infty$). Index "1" zde značí jednorozměrnost a budeme jej zatím vynechávat. Předpis (1.1) definuje na systému $\mathcal{I}$ všech intervalů $I \subset \mathbf{R}$ množinovou funkci, která se nazývá *délka intervalu*. Jedním z prvních cílů teorie míry je najít vhodné rozšíření této množinové funkce.

1.4. σ-algebra. Nechť X je abstraktní množina. Systém $\mathcal{S}$ podmnožin X se nazývá *σ-algebra*, jestliže

(SA-1) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
(SA-2) $A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S}$,
(SA-3) $A_j \in \mathcal{S},\ j = 1, 2, \cdots \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{S}$.

Dvojice $(X, \mathcal{S})$ se nazývá *měřitelný prostor*. Množiny $A \in \mathcal{S}$ se nazývají $\mathcal{S}$-měřitelné množiny. Nehrozí-li nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných množinách.*

1.5. Vlastnosti σ-algebry.

(a) $X \in \mathcal{S}$,
(b) $A, B \in \mathcal{S} \implies B \setminus A \in \mathcal{S}$,
(c) $A_j \in \mathcal{S},\ j = 1, 2, \cdots \implies \bigcap_j A_j \in \mathcal{S}$.

1.6. Příklady σ-algeber.

(a) $\{\emptyset,\ X\}$
(b) Systém 2^X všech podmnožin množiny X.
(c) Borelovské množiny na topologickém prostoru, viz. 1.8.
(d) Lebesgueovsky měřitelné množiny, viz. 1.16, 9.1
(e) Systém všech uzavřených (resp. otevřených) podmnožin topologického prostoru netvoří obecně σ-algebru, například protože není splněn požadavek (SA-2)

1.7. Generování σ-algeber. Je-li $\mathcal{F}$ libovolný systém podmnožin X, potom existuje nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{F}$. Tuto σ-algebru dostaneme jako průnik všech σ-algeber obsahujících $\mathcal{F}$.

1.8. Borelovské množiny. Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{G}$ je systém všech jeho otevřených podmnožin. Potom definujeme $\mathcal{B}(X)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{G}$ (viz. 1.7).

σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ obsahuje kromě otevřených množin též všechny uzavřené množiny. V $\mathbf{R}$ jsou borelovské všechny intervaly, množina všech racionálních čísel, atd. Příklady neborelovských množin se konstruují velmi těžko.

1.9. Míra. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže splňuje

(Mi-1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(Mi-2) jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, jsou po dvou disjunktní, potom

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j).$$

Trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se nazývá *prostor s mírou.*

Zdůrazněme, že definice míry zahrnuje, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je σ-algebra.

1.10. Příklady měr.

(a) Diracova míra δ_a: X je libovolná množina, $a \in X$, $\mathcal{S} = 2^X$,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

(b) *Počítací míra* X je libovolná množina, $\mathcal{S} = 2^X$. Počítací míra přiřadí každé množině $A \subset X$ počet jejích prvků. Nekonečným množinám přiřadí prostě ∞, nerozlišuje nekonečné mohutnosti.
(c) *Lebesgueova míra* zobecňuje pojem délky intervalu, obsahu "obrazce" či objemu "tělesa", viz. 1.16, 9.1.
(d) *Hausdoffova míra* je druh k-rozměrné míry v $\mathbf{R}^n$. Zobecňuje pojem délky křivky ($k = 1$), a povrchu zakřivené plochy ($k = 2$, $n = 3$). Podobné vlastnosti má k-rozměrná míra, kterou zavedeme v 12.9. Viz. též [LM], [DIPP], 12.19.

1.11. Terminologie teorie míry. Míra μ na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{S})$ se nazývá

(a) *konečná,* jestliže $\mu(X) < \infty$,
(b) *σ-konečná,* jestliže existují $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(X_j) < \infty$ a $X = \bigcup_j X_j$,
(c) *pravděpodobnostní,* jestliže $\mu(X) = 1$,
(d) *úplná,* jestliže každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná (a tudíž také míry nula).

Fráze *skoro všude* nebo *μ-skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X. Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{S}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \setminus N$. Používá se zejména pro rovnost a nerovnosti mezi funkcemi a pro bodovou konvergenci posloupnosti funkcí.

1.12. Zúplnění míry. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom existuje nejužší rozšíření míry $(\mathcal{S}, \mu)$ na úplnou míru. Výsledná míra se nazývá *zúplněním* míry μ a značí $(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$. Konstruuje se jako

$$\overline{\mathcal{S}} := \{E \subset X : \exists\, E', E'' \in \mathcal{S} : E' \subset E \subset E'',\ \mu(E'' \setminus E') = 0\},$$
$$\overline{\mu}(E) := \mu(E')\ (= \mu(E'')).$$

(Dokažte jako cvičení!)

1.13. Trik zdisjunktnění. Nechť $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$. Potom existují po dvou disjunktní $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{S}$ tak, že

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = E_1 \cup \dots \cup E_k \quad \forall k = 1, 2, \dots.$$

Tuto vlastnost mají

$$E_1 = A_1, \quad E_2 = A_2 \setminus A_1, \quad E_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \dots.$$

1.14. Vlastnosti míry. Nechť $A_j \in \mathcal{S}$.

(a) $A_1 \subset A_2 \implies \mu(A_1) \le \mu(A_2)$.
(b) Jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, potom

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \lim_j \mu(A_j).$$

(c) Jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, a jestliže $\mu(A_1) < \infty$, potom

$$\mu(\bigcap_j A_j) = \lim_j \mu(A_j).$$

Důkaz. (a) je snadné. K důkazu (b) použijeme trik zdisjunktnění 1.13. (c): Použijeme (b) na $A \setminus A_j$. $\square$

1.15. Příklad. Nechť $X = \mathbf{R}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbf{R})$ a μ je Lebesgueova míra (viz. níže). Nechť $A_j = [j, \infty)$. Potom $A_j \searrow \emptyset$, a přesto $\mu(A_j) \to \infty$. Je to tím, že v 1.14 (c) není splněn předpoklad o konečnosti $\mu(A_1)$.

1.16. Lebesgueova míra v $\mathbf{R}^n$. Množinu $Q \subset \mathbf{R}^n$ nazveme n-rozměrným intervalem, jestliže existují jednorozměrné intervaly $I_1, \dots, I_n \subset \mathbf{R}$ tak, že

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n.$$

Množinu všech n-rozměrným intervalů budeme značit $\mathcal{I}_n$. Každému n-rozměrnému intervalu Q přiřadíme jeho *objem* předpisem

$$\ell_n(Q) = \ell_1(I_1) \dots \ell_1(I_n),$$

kde $\ell_1(I)$ je jako v 1.3.

Lebesgueovu míru v $\mathbf{R}^n$ definujeme jako nejužší úplnou míru, která každému intervalu přiřadí jeho objem (v jednorozněrném případě délku, v dvourozměrném obsah). Budeme ji značit $(\mathfrak{M}_n, \lambda_n)$. Množiny náležející $\mathfrak{M}_n$ budeme nazývat *lebesgueovsky měřitelné množiny.* Index "n" označující dimenzi budeme většinou vynechávat.

Důkaz, že $(\mathcal{I}_n, \ell_n)$ lze rozšířit na úplnou míru a mezi takovými rozšířeními opravdu existuje nejužší prvek, není úplně lehký a odložíme jej na později (viz. 9.4).

1.17. Lebesgueovsky neměřitelné množiny. Ačkoli Lebesgueova míra je definována jako "nejužší", je dostatečně široká. Existují sice Lebesgueovsky neměřitelné množiny (viz. např. [LM]), ale důkaz jejich existence není konstruktivní. Filosoficky vzato, z hlediska výpočtů v aplikacích nemůže mít vliv na výsledek, zda neměřitelné množiny existují nebo ne. Vynechat důkaz měřitelnosti množiny, je-li její měřitelnost požadována, je však hrubou matematickou chybou.

2. Měřitelné funkce

2.1. Značení. Je-li X abstraktní množina a $A \subset X$, značíme χ_A charakteristickou funkci množiny A, neboli

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Symbol ∞ může být užit pro $+\infty$. Na $\overline{\mathbf{R}}$ zavádíme algebraické operace a nerovnosti přirozeným způsobem. Součet $a + b$ má smysl pokud $a \in \mathbf{R}$ nebo $b \in \mathbf{R}$ nebo a a b jsou nekonečna stejného znaménka. Součet $\infty + (-\infty)$ smysl nemá. Součin ab má smysl vždy (důležité !!), ve "sporném případě" zavádíme

$$0 \cdot \pm\infty = 0. \tag{2.1}$$

Podíl a/b má smysl s výjimkou případů $a/0$ a a $\pm\infty/\pm\infty$.

Intervaly typu (a, b), $[-\infty, b)$ a $(a, +\infty]$ budeme nazývat *topologicky otevřené.* Řekneme, že množina $G \subset \overline{\mathbf{R}}$ je *otevřená*, jestliže ji lze vyjádřit jako sjednocení topologicky otevřených intervalů. Snadno nahlédneme, že každé takové sjednocení lze upravit na sjednocení spočetné. Množinu $M \subset \overline{\mathbf{R}}$ nazveme ve shodě s 1.8 *borelovskou*, jesliže náleží do nejmenší σ-algebry generované otevřenými podmnožinami $\overline{\mathbf{R}}$. Systém všech borelovských podmnožin $\overline{\mathbf{R}}$ značíme $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$.

Je-li $f : D \to \overline{\mathbf{R}}$ funkce, definujeme $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$. (Maximum či minimum dvou funkcí se definuje bod po bodu.) Tedy

$$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Je-li f funkce na D a $M \subset \overline{\mathbf{R}}$, značíme

$$\{f \in M\} = \{x \in D : f(x) \in M\},$$

podobně zavádíme značení jako $\{f > a\}$, $\{f = a\}$.

Symbolem $\varphi \circ f$ značíme složenou funkci $x \mapsto \varphi(f(x))$. Značení f^{-1} používáme pro inverzní funkci k f.

V celé kapitole (s výjimkou zavedení jednoduchých funkcí) budeme uvažovat měřitelný prostor $(X, \mathcal{S})$.

2.2. Měřitelné funkce. Nechť $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že funkce $f : D \to \overline{\mathbf{R}}$ je $\mathcal{S}$-měřitelná, jestliže pro každý interval $I \subset \overline{\mathbf{R}}$ je $\{f \in I\} \in \mathcal{S}$. Bude-li z kontextu jasné, v jaké σ-algebře pracujeme, budeme mluvit prostě o "měřitelných funkcích".

2.3. Pozorování. Nechť $D, D_j \in \mathcal{S}$.

(a) Je-li f měřitelná na D a $D_1 \subset D$, pak f je měřitelná na D_1.
(b) Je-li funkce $f : D \to \overline{\mathbf{R}}$ $\mathcal{S}$-měřitelná na D_1 a D_2 a $D = D_1 \cup D_2$, pak f je měřitelná na D.

2.4. Ověřování měřitelnosti. Uvažujme $D \in \mathcal{S}$ a funkci $f : D \to \overline{\mathbf{R}}$. Předpokládejme, že víme např., že

($*$) Pro všechna $q \in \mathbf{Q}$ je $\{f > q\} \in \mathcal{S}$.

Ukážeme, že ($*$) stačí k ověření měřitelnosti funkce f.

1. Nechť $a < \infty$, najděme racionální čísla $q_j \searrow a$. Pak
$$\{f > a\} = \bigcup_j \{f > q_j\}.$$
2. Nechť $a > -\infty$, najděme racionální čísla $r_j \nearrow a$. Pak
$$\{f \geq a\} = \bigcap_j \{f > r_j\}.$$
3. Nechť $b \in \overline{\mathbf{R}}$, pak
$$\{f \leq b\} = D \setminus \{f > b\}, \quad \{f < b\} = D \setminus \{f \geq b\}.$$
4. Nechť $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a \leq b$. Potom
$$\{f \in [a,b]\} = \{f \geq a\} \cap \{f \leq b\}$$

a podobně pro ostatní typy intervalů.

2.5. Měřitelnost vzorů borelovských množin. *Nechť $M \subset \overline{\mathbf{R}}$ je borelovská množina a f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom $\{f \in M\} \in \mathcal{S}$.*

Důkaz. Systém množin $\mathcal{F} := \{M \subset \overline{\mathbf{R}} : \{f \in M\} \in \mathcal{S}\}$ je zřejmě σ-algebra obsahující všechny topologicky otevřené intervaly, a tudíž i všechny otevřené podmnožiny $\overline{\mathbf{R}}$. Jelikož $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ je nejmenší σ-algebra s takovou vlastností, je nutně $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}) \subset \mathcal{F}$. □

2.6. Měřitelnost složené funkce. *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a φ je spojitá funkce na otevřené množině $G \subset \overline{\mathbf{R}}$. Potom množina $D' := \{f \in G\}$ je měřitelná a složená funkce $\varphi \circ f$ je měřitelná na D'.*

Důkaz. Je-li $a \in \mathbf{R}$, potom $G \cap (a, \infty]$ je otevřená podmnožina $\overline{\mathbf{R}}$ a tudíž podle věty 2.5 je $\{\phi \circ f > a\} = \{f \in G \cap (a, \infty]\}$ měřitelná množina. Funkce f je tedy měřitelná podle 2.4. □

2.7. Varování. Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelný. Také není obecně pravda, že inverzní funkce k měřitelné funkci by byla měřitelná funkce.

2.8. Operace s měřitelnými funkcemi. *Nechť funkce f, f_j jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak platí následující:*

(a) *Funkce $|f|$, f^+, f^-, f^2 jsou měřitelné na D, $1/f$ je měřitelná na $\{f \neq 0\}$.*
(b) *Funkce $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$, f_1/f_2 jsou měřitelné vždy na množině, kde učiněná operace dává smysl podle 2.1.*
(c) *Funkce $\sup_j f_j$, $\inf_j f_j$, $\limsup_j f_j$, $\liminf_j f_j$ jsou měřitelné na D.*
(d) *Množina D' všech bodů, kde existuje $\lim_j f_j$ je měřitelná a $\lim_j f_j$ je měřitelná na D'.*

Důkaz. (a) je důsledek věty 2.6.

(b): Máme
$$\{f + g > a\} = \bigcup_{\substack{p,q \in \mathbf{Q} \\ p+q>a}} \{f > p\} \cap \{g > q\}.$$
Dále
$$fg = \frac{1}{4}\Big((f+g)^2 - (f-g)^2\Big).$$
Ostatní je snadné.

(c): Je
$$\{\inf_j f_j > a\} = \bigcap_j \{f_j > a\}$$
a odtud odvodíme i zbytek.

(d) Máme
$$\begin{aligned}\{\lim f_j \text{ existuje}\} &= \{\limsup_j f_j = \liminf_j f_j\} \\ &= D \setminus \Big(\bigcup_{p,q \in \mathbf{Q}} \{\liminf_j f_j < p < q < \limsup_j f_j\}\Big).\end{aligned}$$
□

2.9. Jednoduché funkce. Nechť $\mathcal{S} \subset 2^X$ je množinový systém (ne nutně σ-algebra). Funkci f na $D \in \mathcal{S}$ nazveme *$\mathcal{S}$-jednoduchou*, jestliže f je lineární kombinace charakteristických funkcí množin z $\mathcal{S}$, tj. existují-li množiny $A_j \in \mathcal{S}$ a $\alpha_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, m$, tak, že

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Pokud bude jasné, jaký množinový systém máme na mysli, budeme mluvit prostě o jednoduchých funkcích.

2.10. Aproximace jednoduchými funkcemi. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom existují nezáporné jednoduché funkce $f_k \nearrow f$. Navíc, f lze vyjádřit ve tvaru*

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j}, \tag{2.2}$$

kde $E_j \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Položme

$$P_j = \bigcup_i \Big\{ \big[i2^{-j},\, (i+1)2^{-j}\big) \;:\; i \text{ je liché celé} \Big\}.$$

Potom

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j},$$

kde

$$E_j := \{f \in P_j\}.$$

Jelikož P_j jsou borelovské, $\{f \in P_j\}$ jsou měřitelné podle věty 2.5. Jedná se vlastně o dyadickou expanzi $f(x)$; $x \in E_j$ právě když $f(x)$ má na j-tém místě v dyadickém rozvoji jedničku. Jednoduché funkce f_k můžeme definovat vzorcem

$$f_k = \sum_{j=-k}^{k} 2^{-j} \chi_{E_j}.$$

□

3. Abstraktní Lebesgueův integrál

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. V této kapitole zavedeme *abstraktní Lebesgueův integrál* z μ-měřitelné funkce.

Jednou z motivací pro studium takového integrálu je pojem klasického Lebesgueova integrálu (viz. kapitola 4), který dává použitelnější teorii než integrál Newtonův nebo Riemannův.

Tato motivace však zdaleka není jediná. Obecné pojetí abstraktního Lebesgueova integrálu na libovolném prostoru s mírou má mnoho aplikací v analýze, teorii pravděpodobnosti a v matematice vůbec, v této obecnosti Riemannova i Newtonova metoda nenabízejí ani částečné řešení problému.

3.1. Dělení. Konečný soubor množin $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{S}$ nazveme *dělením* množiny $D \in \mathcal{S}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j = D.$$

3.2. Charakteristika jednoduchých funkcí. *Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na D. Pak je ekvivalentní*

(i) *f je jednoduchá,*
(ii) *f nabývá jen konečně mnoha hodnot,*
(iii) *existuje dělení $\{A_j\}_{j=1}^m$ množiny D a nezáporná čísla α_j, $j = 1, \dots, m$ tak, že*

$$f = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Důkaz. Implikace (i) $\Longrightarrow$ (ii) a (iii) $\Longrightarrow$ (i) jsou zřejmé. Pro (ii) $\Longrightarrow$ (iii), nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou hodnoty, kterých nabývá funkce f a položme $A_j = \{f = \alpha_j\}$. □

3.3. Konstrukce integrálu. Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ (s hodnotami v $\overline{\mathbf{R}}$). Integrál $\int_D f\,d\mu$ vybudujeme ve dvou krocích.

1. Je-li f nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$\int_D f\,d\mu = \sup\Big\{\sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je dělení } D, \quad 0 \le \alpha_j \le f \text{ na } A_j,\ j = 1, \dots, m\Big\}. \tag{3.1}$$

Součty vyskytující se v (3.1) nazýváme *dolními součty* k funkci f. Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován *vždy*, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D, definujeme

$$\int_D f\,d\mu = \int_D f^+\,d\mu - \int_D f^-\,d\mu, \tag{3.2}$$

pokud rozdíl v (3.2) má smysl. Pokud

$$\int_D f^+\,d\mu = \int_D f^-\,d\mu = \infty,$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná funkce na $D' \subset D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f\,d\mu = \int_{D'} f\,d\mu.$$

Výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D'.

V některých případech je účelné používat podrobnější zápis

$$\int_D f(x)\,d\mu(x) \quad \text{pro} \quad \int_D f\,d\mu.$$

Je-li integrál $\int_D f\,d\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f\,d\mu$ *konverguje* nebo že f je *integrovatelná*.

3.4. Různé vlastnosti Lebesgueova integrálu. *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a f, g jsou měřitelné funkce na D.*

(a) *Je-li $f \ge 0$, D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$ a $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak*

$$\int_{D_1} f\,d\mu \le \int_{D_2} f\,d\mu.$$

(b) *Jestliže D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ a $D_1 \cup D_2 = D$, pak*

$$\int_D f\,d\mu = \int_{D_1} f\,d\mu + \int_{D_2} f\,d\mu.$$

(c) *Je-li $\int_D |f|\,d\mu < \infty$, pak $|f| < \infty$ skoro všude.*

(d) *Je-li $\int_D |f|\,d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*

(e) (monotonie) *Jestliže f, g mají integrál a $f \le g$ skoro všude, pak*

$$\int_D f\,d\mu \le \int_D g\,d\mu.$$

(f) *Je-li $\int_D g\,d\mu < \infty$ a $|f| \le g$ skoro všude, pak f je integrovatelná.*

Důkaz. (a), (b), (c) jsou snadné. (d): Jestliže množiny $E_j := \{|f| > 2^{-j}\}$ mají míru nula, pak $f = 0$ skoro všude. Pokud jedna z nich má kladnou míru, pak $2^{-j}\mu(E_j)$ je dolní součet k $|f|$ a tudíž integrál $|f|$ je kladný. (e): Tvrzení je snadné, pokud $0 \le f \le g$ na D. V obecném případě se důkaz provede rozdělením na množiny $\{f \le 0 \le g\}$, $\{f \le g < 0\}$, $\{0 < f \le g\}$, $\{g < f\}$ a diskusí. (f) plyne z (e) a definice integrálu. $\square$

3.5. Lemma o monotonii. *Nechť $D \in \mathcal{S}$. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^n$, $\{B_i\}_{i=1}^m$ jsou dělení D a*

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n. \quad \beta_1, \dots, \beta_m$$

jsou nezáporná reálná čísla. Jestliže

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{B_i} \le \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j},$$

potom

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i) \le \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j). \tag{3.3}$$

Důkaz. Je-li $A_j \cap B_i \neq \emptyset$, potom z předpokladů plyne $\beta_i \le \alpha_j$ a tudíž

$$\beta_i \mu(A_j \cap B_i) \le \alpha_j \mu(A_j \cap B_i). \tag{3.4}$$

Pokud $A_j \cap B_i = \emptyset$, pak $\mu(A_j \cap B_i) = 0$ a zase dostáváme (3.4). Sečtením přes i, j a záměnou pořadí sumace dostáváme

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \mu(A_j \cap B_i) \le \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j \cap B_i). \tag{3.5}$$

Jelikož

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \cap B_i) = \mu(B_i), \qquad \sum_{i=1}^{m} \mu(A_j \cap B_i) = \mu(A_j),$$

z (3.5) dostáváme (3.4). □

3.6. Integrál jednoduché funkce. *Nechť $D \in \mathcal{S}$. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^n$, $\{B_i\}_{i=1}^m$ je dělení D a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Potom*

$$\int_D \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \Big) \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j).$$

Důkaz. Označme

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Je-li

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i)$$

dolní součet k f, podle lemmatu 3.5 dostáváme

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i) \le \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

a přechod k supremu přes všechny dolní součty dává

$$\int_D f \, d\mu \le \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j).$$

Jelikož

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

je též dolní součet k f, máme i obrácenou nerovnost. □

3.7. Důsledek. Je-li f nezáporná měřitelná funkce na $\mathcal{S}$, potom

$$\int_D f = \sup \Big\{ \int_D s : \ 0 \le s \le f, \ \ s \ \text{ je jednoduchá.} \Big\}$$

3.8. Leviho věta. *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$, $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$, a $f = \lim f_j$. Potom*

$$\int_D f \, d\mu = \lim_j \int_D f_j \, d\mu. \tag{3.6}$$

Důkaz. Nechť

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

je dolní součet k f. Označme

$$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j},$$

zvolme $\tau > 1$ a položme

$$E_k = \{\tau f_k \geq s\}.$$

Snadno ověříme, že $\bigcup_k E_k = D$. Podle 1.14 (b),

$$\mu(A_j) = \lim_k \mu(A_j \cap E_k),$$

tedy (záměna limity a konečné sumy není žádný problém)

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \lim_k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap E_k). \tag{3.7}$$

Každý součet

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap E_k)$$

je dolní součet k τf_k, tedy limitu na pravé straně (3.7) můžeme shora odhadnout limitou

$$\lim_k \int_D \tau f_k \, d\mu.$$

Tedy

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) \leq \lim_k \tau \int_D f_k \, d\mu.$$

Přechodem k supremu přes všechny dolní součty k f dostáváme

$$\int_D f \, d\mu \leq \tau \lim_k \int_{E_k} f \, d\mu$$

a přechodem pro $\tau \searrow 1$ máme

$$\int_D f \, d\mu \leq \lim_k \int_{E_k} f \, d\mu.$$

Opačná nerovnost je zřejmá. □

3.9. Spojitost integrálu. *Nechť D, $E_k \in \mathcal{S}$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, $\bigcup_k E_k = D$. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na D. Potom*

$$\int_D f = \lim_k \int_{E_k} f.$$

Důkaz. Stačí aplikovat Leviho větu na $f_k = f\chi_{E_k}$. □

3.10. Linearita integrálu. (a) *Nechť f, g jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$, buď nezáporné nebo integrovatelné. Potom*

$$\int_D (f+g) \, d\mu = \int_D f \, d\mu + \int_D g \, d\mu.$$

(b) *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $\gamma \in \mathbf{R}$. Pokud f má integrál, pak*

$$\int_D \gamma f \, d\mu = \gamma \int_D f \, d\mu.$$

Důkaz. Tvrzení (b) je zřejmé.

(a): Nejprve předpokládejme, že funkce f a g jsou nezáporné a jednoduché. Podle věty 3.2 najdeme vyjádření

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}, \qquad g = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{B_i},$$

kde $\{A_j\}_{j=1}^n$, $\{B_i\}_{i=1}^m$ jsou dělení D a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \dots, \beta_m$ jsou nezáporná reálná čísla. Potom také $\{A_j \cap B_i : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ je dělení D a

$$f + g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_i) \chi_{A_j \cap B_i}.$$

Podle věty 3.6

$$\int_D f \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j),$$

$$\int_D g \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i)$$

a

$$\int_D (f + g) \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i).$$

Máme

$$\begin{aligned}
\int_D (f + g) \, d\mu &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j \cap B_i) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \mu(A_j \cap B_i) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu(B_i).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden pro jednoduché funkce.

Nechť f a g jsou nezáporné měřitelné funkce. Podle věty 2.10 existují nezáporné jednoduché funkce $f_j \nearrow f$, $g_j \nearrow g$. Pak také $(f_j + g_j) \nearrow (f + g)$. Podle předchozí části důkazu

$$\int_D (f_j + g_j) \, \mu = \int_D f_j \, \mu + \int_D g_j \, \mu$$

a na obou stranách rovnosti použijeme Leviho větu k limitnímu přechodu. To nám dá důkaz pro nezáporné měřitelné funkce. V případě, že f a g jsou integrovatelné funkce na D, buď

$$D' = \{|f| + |g| < \infty\}.$$

Potom $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$. Na D' platí

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Podle předchozího kroku máme

$$\begin{aligned}
\int_D (f + g)^+ \, d\mu + \int_D f^- \, d\mu + \int_D g^- \, d\mu &= \int_D [(f + g)^+ + f^- + g^-] \, d\mu \\
&= \int_D [(f + g)^- + f^+ + g^+] \, d\mu \\
&= \int_D (f + g)^- \, d\mu + \int_D f^+ \, d\mu + \int_D g^+ \, d\mu.
\end{aligned}$$

Vhodným přeskupením sčítanců dostaneme

$$\int_D (f + g)^+ \, d\mu - \int_D (f + g)^- \, d\mu = \int_D f^+ \, d\mu - \int_D f^- \, d\mu + \int_D g^+ \, d\mu - \int_D g^- \, d\mu,$$

což je dokazovaný vzorec. Tvrzení (b) je zřejmé. $\square$

Integrál podle Lebesgueovy míry λ budeme nazývat (klasickým) *Lebesgueovým integrálem*. V této kapitole dokážeme, že pro každou spojitou funkci f na intervalu $[a,b]$ splývá

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda$$

s Newtonovým integrálem funkce f přes $[a,b]$. Pro klasický Lebesgueův integrál funkce f přes interval (a,b) budeme též používat tradiční značení

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Používání klasického Lebesgueova integrálu je mnohem výhodnější než používání Riemannova či Newtonova integrálu, neboť vede k "úplnější" třídě integrovatelných funkcí.

Lze dokázat, že každá Riemannovsky integrovatelná funkce je Lebesgueovsky integrovatelná a Lebesgueův integrál v tomto případě splývá s Riemannovým. Opačná inkluze neplatí, lebesgueovsky integrovatelných funkcí je víc.

Lebesgueův integrál nepokrývá tzv. neabsolutně konvergentní integrály, např.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

které v jednoduchých případech zachycuje Newtonův integrál. Pro studium neabsolutně konvergentních integrálů se hodí pojem Perronova nebo Kurzweilova integrálu. Neabsolutně konvergentní integrály využívají eukleidovskou strukturu a nemají rozumný protějšek na obecných prostorech s mírou.

4.1. Neurčitý Lebesgueův integrál. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a_0,b_0) a F je primitivní funkce k f. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

pro každý interval $[a,b] \subset (a_0,b_0)$.

Důkaz. Zvolme libovolně $c \in (a_0,a)$ a položme

$$G(\xi) = \int_c^\xi f(x)\,dx, \qquad \xi \in (c,b_0).$$

Snadno ověříme, že $G' = f$ na (c,b_0). G a F jsou tedy primitivní funkce k f na (c,b_0), a tudíž se liší jen o additivní konstantu. Proto

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

□

4.2. Kritérium konvergence Lebesgueova integrálu. Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a,b). Nechť F je primitivní funkce k f a G je primitivní funkce k $|f|$. Případné jednostranné limity funkce F v krajních bodech intervalu (a,b) značíme

$$F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x), \qquad F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x).$$

(a) Jestliže funkce G je omezená, potom konverguje i $\int_a^b f(x)\,dx$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+). \tag{4.1}$$

(b) Jestliže funkce G je neomezená, potom Lebesgueův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ diverguje.

Důkaz. (a) Zvolme $c \in (a,b)$ a najděme intervaly $[a_j,b_j]$ tak, že $a < a_j < c < b_j < b$, $a_j \searrow a$, $b_j \nearrow b$. Podle vět 4.1 a 3.9 je

$$\int_c^b |f(x)|\,dx = \lim_j \int_c^{b_j} |f(x)|\,dx = \lim_j (G(b_j) - G(c)) < \infty.$$

Tedy podle věty 3.4 (f) integrál f přes (c, b) konverguje a pro $x \in (c, b)$ máme s pomocí věty 4.1

$$|F(x) - F(c) - \int_c^b f(x)\,dx| = |\int_x^b f(x)\,dx| \le \int_x^b |f(x)|\,dx.$$

Jelikož podle 3.9 je

$$\lim \int_x^b |f(x)|\,dx = 0,$$

máme

$$F(b-) = \lim_{x \to b-} F(x) = F(c) + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Podobně

$$F(a+) = F(c) - \int_c^a f(x)\,dx.$$

Odečtením dostaneme (4.1).

(b) Nechť F je primitivní funkce k f, G je primitivní funkce k $|f|$. Potom funkce G je neklesající, neboť $|f| \ge 0$. Podobně jako v případě (a) ukážeme za pomoci vět 4.1 a 3.9, že

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \lim_j \int_{a_j}^{b_j} |f(x)|\,dx = \lim_j (G(b_j) - G(a_j)) = \infty.$$

Tedy podle věty 3.4 (f) Lebesgueův integrál funkce f přes (a, b) diverguje. □

5. Záměna limity a integrálu

Vzorec

$$\int_D \lim_j f_j = \lim_j \int_D f_j$$

platí pro Lebesgueův integrál za značně obecných předpokladů. Na druhé straně je snadné sestrojit protipříklady (např. pro klasický Lebesgueův integrál $f_j(x) = j^2 e^{-jx}$, $D = (0, \infty)$), a tudíž je zapotřebí tyto předpoklady hlídat.

V dalším budeme uvažovat prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

5.1. Fatouovo lemma. *Nechť $D \in S$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D. Potom*

$$\int_D \liminf_j f_j\,d\mu \le \liminf_j \int_D f_j\,d\mu. \tag{5.1}$$

Důkaz. Pro $k = 1, 2, \dots$ máme

$$\int_D \inf_{j \ge k} f_j\,d\mu \le \inf_{j \ge k} \int_D f_j\,d\mu$$

Limitní přechod pro $k \to \infty$ s použitím Leviho věty na posloupnost $\{\inf_{j \ge k} f_j\}_k$ dává (5.1). □

5.2. Lebesgueova věta. *Nechť $D \in S$ a f, f_j, $j = 1, 2, \dots,$ jsou měřitelné funkce na D. Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná* majoranta*) tak, že*

$$|f_j(x)| \le g(x), \qquad j = 1, 2, \dots, \quad x \in D. \tag{5.2}$$

Potom

$$\int_D f = \lim_j \int_D f_j. \tag{5.3}$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že uvažované funkce jsou konečné a konvergence nastává všude, jinak bychom z D odstranili množinu míry nula. Použijeme additivitu integrálu a Fatouovo lemma na funkce $g + f_j$, $g - f_j$. Dostaneme

$$\int_D f \le \liminf_j \int_D f_j \le \limsup_j \int_D f_j \le \int_D f,$$

což je (5.3). □

5.3. Lebesgueova věta pro řady. *Nechť $D \in S$ a g_j, $j = 1, 2, \ldots$, jsou měřitelné funkce na D. Nechť řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná* majoranta*) tak, že*

$$\Big|\sum_{j=1}^{k} g_j(x)\Big| \le g(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad x \in D. \tag{5.4}$$

Potom

$$\int_D \sum_j g_j \, d\mu = \sum_j \int_D g_j \, d\mu. \tag{5.5}$$

Důkaz. Stačí použít additivitu integrálu a Lebesgueovu větu na částečné součty. □

Předpoklad (5.4) se těžko ověřuje, protože málokdy umíme spočítat částečné součty řady. Výjimku tvoří geometrické řady, ale i tam jsou jednodušší cesty k cíli. Následující věta obsahuje praktická kritéria pro záměnu řady a integrálu.

5.4. Záměna řady a integrálu. *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a g_j, $j = 1, 2, \ldots$ jsou měřitelné funkce na D. Předpokládejme, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:*

(a) $g_j \ge 0$ *(Leviho věta pro řady),*
(b) $\sum_j \int_D |g_j| \, d\mu < \infty$,
(c) $\int_D \sum_j |g_j| \, d\mu < \infty$,
(d) $g_j = (-1)^j h_j$, $h_1 \ge h_2 \ge h_3 \ge \cdots \ge 0$, $h_j \to 0$, h_1 *je integrovatelná (alternující řada).*

Potom řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude a platí vzorec

$$\int_D \sum_j g_j \, d\mu = \sum_j \int_D g_j \, d\mu,$$

Důkaz. (a) získáme použitím Leviho věty na částečné součty. Použijeme-li (a) na $|g_j|$, zjistíme, že podmínky (b) a (c) jsou ekvivalentní. Předpokládejme tedy (b) nebo (c). Funkce $g := \sum_j |g_j|$ je integrovatelná, a tudíž podle věty 3.4 konečná skoro všude. V bodech x, kde je $g(x)$ konečná, konverguje řada $\sum_j g_j(x)$, neboť konverguje absolutně. Můžeme tedy použít Lebesgueovu větu 5.3 s majorantou g. V případě (d) řada $\sum_j g_j$ konverguje podle Leibnitzova kritéria a částečné součty mají majorantu h_1, tudíž můžeme provést záměnu podle Lebesgueovy věty 5.3. □

5.5. Varování. Všimněte si dobře pořadí operátorů $\sum, \int, |\ldots|$ v podmínkách 5.4 (b), (c) ! Jen velmi slabý student se může radovat, když ověří třeba

$$\int_D \Big|\sum_j g_j \, d\mu\Big| < \infty.$$

6. Integrál závislý na parametru

V této kapitole uvažujeme prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $D \in \mathcal{S}$. Cílem je studovat chování funkce

$$F(t) := \int_D f(t, x) \, d\mu(x),$$

kde t je další proměnná ("parametr"). Je-li f funkce dvou proměnných t a x, zavedeme funkce $f(\cdot, x)$ proměnné t a $f(t, \cdot)$ proměnné x předpisem

$$f(t, \cdot): \ x \mapsto f(t, x),$$
$$f(\cdot, x): \ t \mapsto f(t, x).$$

6.1. Spojitost integrálu závislého na parametru. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$ a P je metrický prostor. Buď $a \in P$ a U okolí bodu a v P. Nechť funkce $f : U \times D \to \mathbf{R}$ má následující vlastnosti:*

(Sp-1) *Pro všechna $x \in D$ je funkce $f(., x)$ spojitá v a,*
(Sp-2) *pro všechna $t \in U$ je funkce $f(t, .)$ měřitelná,*
(Sp-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in U$ a $x \in D$ je $|f(t, x)| \le g(x)$.*

Potom pro všechna $t \in U$ je $f(t,.)$ integrovatelná a funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t,x)\, d\mu(x)$$

je spojitá v bodě a.

Důkaz. Připomeňme, že v metrických prostorech lze použít ekvivalentní tzv. Heineovu definici limity: K důkazu tvrzení

$$\lim_{t\to a} \int_D f(t,.)\, d\mu = \int_D f(a,.)\, d\mu$$

stačí ověřit, že pro každou posloupnost $t_j \to a$ bodů množiny U platí

$$\lim_j \int_D f(t_j,.)\, d\mu = \int_D f(a,.)\, d\mu\, .$$

To je však zřejmé z Lebesgueovy věty 5.2. □

6.2. Limita integrálu závislého na parametru I. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$ a $(a,b) \subset \mathbf{R}$ je interval. Nechť funkce $f : (a,b) \times D \to \mathbf{R}$ má následující vlastnosti:*

(Li-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ existuje*

$$\lim_{t\to a+} f(t,x).$$

(Li-2) *Pro všechna $t \in (a,b)$ je funkce $f(t,.)$ měřitelná,*

(Li-3) *Existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in U$ a $x \in D$ je $|f(t,x)| \le g(x)$.*

Potom

$$\int_D \lim_{t\to a+} f(x,t)\, dt = \lim_{t\to a+} \int_D f(x,t)\, dt, \tag{6.1}$$

speciálně výrazy vyskytující se v (6.1) mají smysl.

Důkaz. Důkaz je prakticky stejný jako u věty 6.1. □

6.3. Limita integrálu závislého na parametru II. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$ a $(a,b) \subset \mathbf{R}$ je interval. Nechť funkce $f : (a,b) \times D \to \mathbf{R}$ má následující vlastnosti:*

(Li-1) *Pro skoro všechna $x \in D$ existuje*

$$\lim_{t\to a+} f(t,x)$$

(vlastní či nevlastní).

(Li-2) *Pro všechna $t \in (a,b)$ je funkce $f(t,.)$ měřitelná,*

(Li-4) *Funkce f je nezáporná a*

$$\int_D \lim_{t\to a+} f(x,t)\, dt = \infty.$$

Potom

$$\lim_{t\to a+} \int_D f(x,t)\, dt = \infty.$$

Důkaz. Důkaz probíhá jako u věty 6.2, pouze místo Lebesgueovy věty použijeme Fatouovo lemma. □

6.4. Derivace integrálu závislého na parametru. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times D \to \mathbf{R}$ má následující vlastnosti:*

(De-1) *Pro všechna $x \in D$ je funkce $f(.,x)$ diferencovatelná na I,*

(De-2) *pro všechna $t \in I$ je funkce $f(t,.)$ měřitelná,*

(De-3) *existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in I$ a $x \in D$ je*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \le g(x),$$

(De-4) *existuje $t_0 \in I$ tak, že $f(t_0,.)$ je integrovatelná na D.*

Potom pro všechna $t \in I$ je $f(t,.)$ integrovatelná na D, funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t,x)\, d\mu(x)$$

je diferencovatelná na I a platí vzorec

$$F'(t) = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x)\,.$$

Důkaz. Nechť $a, b \in I$, $b \neq a$. Podle věty o střední hodnotě pro každé $x \in D$ existuje ξ mezi a a b tak, že

$$\Big|\frac{f(b,x) - f(a,x)}{b-a}\Big| = \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(\xi, x)\Big| \le g(x).$$

Odtud pro $a = t_0$ plyne, že funkce

$$x \mapsto \frac{f(b,x) - f(a,x)}{b-a}$$

je integrovatelná, tudíž i funkce $f(b,.)$ je integrovatelná. Zvolme znovu $a \in I$. Uvažujme funkci

$$h(t,x) = \begin{cases} \dfrac{f(t,x) - f(a,x)}{t-a}, & t \neq a, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(a,x), & t = a. \end{cases}$$

Z předpokladů a výše dokázaného je jasné, že funkce $h(t,x)$ splňuje předpoklady věty 6.1 pro spojitost v bodě a (s majorantou g), tedy

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{t\to a} \frac{\int_D f(t,x)\, d\mu(x) - \int_D f(a,x)\, d\mu(x)}{t-a} \\ &= \lim_{t\to a} \int_D \frac{f(t,x) - f(a,x)}{t-a}\, d\mu(x) = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}(a,x)\, d\mu(x)\,. \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána. □

6.5. Příklad. Uvažujme funkci

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, e^{-tx}\, dx.$$

Potom F je spojitá na $[0,\infty)$ (majoranta $x^{-2}(1-\cos x)$) a pro $t \in (0,\infty)$ je

$$F'(t) = -\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x}\, e^{-tx}\, dx,$$

$$F''(t) = \int_0^\infty (1-\cos x)\, e^{-tx}\, dx.$$

Zde již nemůžeme najít majorantu najednou pro $t \in (0,\infty)$, poslouží

$$x \mapsto \frac{1-\cos x}{x}\, e^{-ax},$$

$$x \mapsto (1-\cos x)\, e^{-ax}$$

pro $t \in (a,\infty)$. Jelikož pro $p > 0$, $q \in \mathbf{R}$ je

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-px}\, \cos qx\, dx &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-px - \mathrm{i}qx}\, dx = -\operatorname{Re}\Big[\frac{e^{-px-\mathrm{i}qx}}{p+\mathrm{i}q}\Big]_{x=0}^\infty = \operatorname{Re}\, \frac{1}{p+\mathrm{i}q} \\ &= \frac{p}{p^2+q^2}\,, \end{aligned}$$

máme

$$F''(t) = \frac{t}{t^2} - \frac{t}{t^2+1} = \frac{1}{t(t^2+1)}.$$

Jelikož

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty} F'(t) = 0,$$

snadno ověříme

$$F'(t) = \ln\Big(1 + \frac{1}{t^2}\Big), \quad t \in (0,\infty),$$

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\, t\, \ln\Big(1 + \frac{1}{t^2}\Big), \quad t \in [0,\infty).$$

Speciálně dostáváme

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = F(0) = \frac{\pi}{2}. \tag{6.2}$$

Buď

$$G(a) = \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Potom integrováním per partes dostaneme

$$G(a) = \frac{1-\cos a}{a} + \int_0^a \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Limitní přechod s využitím (6.2) dává

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} G(a) = \frac{\pi}{2}.$$

7. Prostory L^p

7.1. L^p-normy. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Definujeme $\Lambda(X)$ jako množinu všech $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí u s definičním oborem $D_u \in \mathcal{S}$, skoro všude definovaných (tj. $\mu(X \setminus D_u) = 0$)) a skoro všude konečných.

Jsou-li $u, v \in \Lambda(X)$, pak součet $u(x) + v(x)$ má smysl skoro všude na X, tedy $u + v \in \Lambda(X)$.

Na $\Lambda(X)$ zavedeme ekvivalenci

$$u \sim v \quad \text{jestliže } u = v \text{ skoro všude.}$$

Je-li $u \in \Lambda(X)$ a $1 \le p < \infty$, definujeme

$$\|u\|_p := \Big(\int_X |u|^p\,d\mu\Big)^{1/p}.$$

Dále definujeme

$$\|u\|_\infty := \inf\Big\{C \ge 0 : |u| \le C \text{ skoro všude}\Big\}.$$

7.2. Youngova nerovnost. *Jsou-li $a, b \ge 0$, $p, q \in (1, \infty)$, $pq = p + q$, pak*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz. Pro $a = 0$ nebo $b = 0$ je důkaz triviální. Jinak z konkavity logaritmu dostáváme, že

$$\ln\Big(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\Big) \ge \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab).$$

□

7.3. Hölderova nerovnost. *Jsou-li $u, v \in \Lambda(X)$, $p, q \in (1, \infty)$, $pq = p + q$, pak*

$$\|uv\|_1 \le \|u\|_p \|v\|_q.$$

Rovnost nastává, právě když existují $a, b \in [0, \infty)$ (aspoň jedno z nich nenulové) tak, že $a|u|^p = b|v|^q$ skoro všude.

Důkaz. Označme

$$s = \|u\|_p, \quad t = \|v\|_q.$$

Můžeme předpokládat, že funkce u, v jsou nezáporné a že $0 < s < \infty$, $0 < t < \infty$. Potom pro skoro každé $x \in X$ máme z Youngovy nerovnosti

$$\frac{u(x)}{s}\,\frac{v(x)}{t} \le \frac{u(x)^p}{ps^p} + \frac{v(x)^q}{qt^q}.$$

Zintegrováním podle x dostaneme

$$\frac{1}{st}\int_X uv\,d\mu \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tvrzení o rovnosti dostaneme analýzou důkazu. □

7.4. Minkowského nerovnost. *Jsou-li $u, v \in \Lambda(X)$, $p \in (1, \infty)$, pak*

$$\|u + v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $0 < \|u\|_p < \infty$, $0 < \|v\|_p < \infty$. Pro skoro každé $x \in X$ máme

$$|u(x)| \leq \Big(|u(x)|^p + |v(x)|^p\Big)^{1/p},$$
$$|v(x)| \leq \Big(|u(x)|^p + |v(x)|^p\Big)^{1/p},$$

tedy po sečtení a umocnění na p

$$|u(x) + v(x)|^p \leq \big(|u(x)| + |v(x)|\big)^p \leq 2^p(|u(x)|^p + |v(x)|^p),$$

takže $\|u + v\|_p < \infty$. S pomocí Hölderovy nerovnosti, kde definujeme $q = \frac{p}{p-1}$, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_X |u + v|^p \, d\mu &\leq \int_X |u + v|^{p-1}|u| \, d\mu + \int_X |u + v|^{p-1}|v| \, d\mu \\ &\leq \Big(\int_X |u + v|^p \, d\mu\Big)^{1/q} \Big(\int_X |u|^p \, d\mu\Big)^{1/q} \\ &\quad + \Big(\int_X |u + v|^p \, d\mu\Big)^{1/q} \Big(\int_X |v|^p \, d\mu\Big)^{1/q}.\end{aligned} \tag{7.1}$$

Jelikož

$$0 < \Big(\int_X |u + v|^p \, d\mu\Big)^{1/q} < \infty,$$

můžeme tímto výrazem vydělit obě strany nerovnosti (7.1) a dostaneme požadovaný výsledek. □

7.5. Zavedení Lebesgueových prostorů. Nechť $1 \leq p \leq \infty$. Prostor $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$, krátce $L^p(X)$ nebo $L^p(\mu)$, definujeme jako množinu všech $u \in \Lambda(X)$, pro něž

$$\|u\|_p < \infty.$$

Na prostoru $L^p(X)$ budeme uvažovat dvě rovnosti. Jedna bude "obyčejná" rovnost funkcí, druhá rovnost skoro všude, neboli ekvivalence $\sim$. V druhém případě prvky prostoru formálně vzato nejsou funkce, ale třídy sobě ekvivalentních funkcí. Lineární operace a norma nezávisí na volbě reprezentanta třídy ekvivalence.

Prostor $L^p(X)$ vybavený rovností $\sim$, lineární strukturou a normou je normovaný lineární prostor. Vskutku: jediné co není zřejmé nebo aspoň velmi snadné, je trojúhelníková nerovnost pro $1 < p < \infty$, ale to je Minkowského nerovnost. Zdůrazněme, že mezi požadované vlastnosti v definici normy patří

$$\|u\| = 0 \implies u \text{ je nulový prvek prostoru},$$

což je umožněno tím, že namísto rovnosti $=$ uvažujeme rovnost $\sim$.

7.6. Úplnost prostorů L^p. *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost prvků $L^p(X)$, cauchyovská v normě $\|\dots\|_p$. Pak existuje $f \in L^p(X)$ tak, že $\|f_j - f\|_p \to 0$. Dále existuje posloupnost $\{g_j\}$ vybraná z $\{f_j\}$ tak, že $g_j \to f$ μ-skoro všude.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro $p < \infty$; případ $p = \infty$ je odlišný a snadnější. Jelikož $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost, lze z ní vybrat posloupnost g_j tak, že pro všechna $j = 1, 2, \dots$ platí

$$\|g_{j+1} - g_j\| < 2^{-j}. \tag{7.2}$$

Položme

$$\begin{aligned} h_k &= |g_1| + |g_2 - g_1| + \cdots + |g_k - g_{k-1}|, \\ h &= \lim_{k \to \infty} h_k \end{aligned}$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro L^p-normu a (7.2) dostaneme

$$\|h_k\|_p \leq \|g_1\|_p + \sum_{j=1}^{k} \|g_{j+1} - g_j\|_p \leq \|g_1\|_p + 1.$$

Podle Leviho věty 3.8 a předchozího odhadu je

$$\int_X h^p \, d\mu = \lim_k \int_X h_k^p \, d\mu = \lim_k \|h_k\|_p^p \leq (\|g_1\|_p + 1)^p$$

Funkce h^p je tedy integrovatelná a tím spíš skoro všude konečná (viz. 3.4 (c)). Uvažujme bod x, v němž $h(x) < \infty$. Potom řada

$$g_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \big(g_{j+1}(x) - g_j(x)\big)$$

konverguje, neboť konverguje řada absolutních hodnot. Tím jsme dokázali existenci limity

$$f(x) := \lim_{j\to\infty} g_j(x)$$

v každém takovém bodě x. Lebesguova věta 5.2 s majorantou h^p dává

$$\lim_{j\to\infty} \int_X |f - g_j|^p \, d\mu = \int_X \lim_{j\to\infty} |f - g_j|^p \, d\mu = 0.$$

Znovu použijeme, že $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost, a dostáváme

$$\|f - f_j\|_p \le \|f - g_j\|_p + \|g_j - f_j\|_p \to 0.$$

Tvrzení o konvergenci skoro všude jsme dokázali v průběhu. □

7.7. Hustota jednoduchých funkcí I. *Jednoduché L^p-funkce jsou husté v $L^p(X)$, $1 \le p < \infty$.*

Důkaz. Nechť $f \in L^p(X)$. Chceme najít posloupnost $\{f_j\}$ jednoduchých funkcí tak, aby $\|f_j - f\|_p \to 0$. Můžeme předpokládat, že $f \ge 0$. Podle věty 2.10 existují jednoduché funkce $f_j \ge 0$ tak, že $f_j \nearrow f$. Z Lebesgueovy věty 5.2 (majoranta $|f|^p$) dostaneme

$$\int_X |f_j - f|^p \, dx \to 0.$$

□

8. Konstrukce měr

V této kapitole uvedeme obecné schéma používané ke konstrukci měr. Motivem jsou aplikace na konstrukce měr v analýze, zvláště Lebesgueovy míry, a aplikace v teorii pravděpodobnosti.

8.1. Vnější míra. *Vnější mírou* na množině X rozumíme množinovou funkci $\gamma : 2^X \to [0,\infty]$ (tedy definovanou na všech podmnožinách X) splňující následující požadavky:

(VM-1) $\gamma(\emptyset) = 0$,
(VM-2) $A \subset B \implies \gamma(A) \le \gamma(B)$,
(VM-3) $\gamma(\bigcup A_j) \le \sum \gamma(A_j)$ (*σ-subadditivita*).

S vnějšími měrami se budeme setkávat především jako s mezistupněm při konstrukci míry.

8.2. Z výchozí množinové funkce k vnější míře. Nechť $\mathcal{G} \subset 2^X$ a $\tau : \mathcal{G} \to [0,\infty]$ je množinová funkce na X splňující

$$\emptyset \in \mathcal{G}, \quad \tau(\emptyset) = 0. \tag{8.1}$$

Podmínce (8.1) budeme říkat *počáteční podmínka*. Pro $A \subset X$ položme

$$\tau^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j) : G_j \in \mathcal{G},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A\}$$

(uvědomte si, že $\inf \emptyset = +\infty$). Každý součet

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j),$$

kde

$$G_j \in \mathcal{G},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A,$$

nazveme *horním součtem* k $\tau^*(A)$. Užitečnost konstrukce dokládá následující věta.

8.3. Věta o τ^*. *Nechť $\mathcal{G}$, τ a τ^* jsou jako v 8.2. Potom τ^* je vnější míra.*

Důkaz. (VM-1) a (VM-2) jsou zřejmé. (VM-3): Chceme-li dokázat

$$\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j),$$

zřejmě se stačí omezit na případ, kdy na pravé straně máme konečné číslo. Volme $\varepsilon > 0$ a nalezněme $G_j^i \in \mathcal{G}$, $i, j = 1, 2, \ldots$, tak, aby

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_j^i \supset A_j \text{ a } \sum_{i=1}^{\infty} \tau(G_j^i) < \tau^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon\,.$$

Potom

$$\bigcup_{j,i=1}^{\infty} G_j^i \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ a } \sum_{j,i=1}^{\infty} \tau(G_j^i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j) + \varepsilon.$$

Tedy

$$\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j) + \varepsilon.$$

□

8.4. γ-měřitelné množiny. Nechť γ je abstraktní vnější míra na X. Množinu $M \subset X$ nazveme *γ-měřitelnou (podle Carathéodoryho)*, jestliže pro každou "testovací" množinu $T \subset X$ platí

$$\gamma(T) = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)$$

Systém všech (carathéodoryovsky) měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}(\gamma)$ a množinovou funkci $\gamma\lfloor\mathfrak{M}(\gamma)$ značíme γ°.

K důkazu γ-měřitelnosti množiny M stačí ověřit pouze nerovnost

$$\gamma(T) \geq \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)\ ,$$

a to ještě samozřejmě jen v případech, kdy $\gamma(T) < +\infty$.

8.5. Carathéodoryova věta. *Nechť γ je abstraktní vnější míra na X. Pak systém $\mathfrak{M}(\gamma)$ tvoří σ-algebru a γ° je úplná míra.*

Důkaz. Ihned je vidět, že $\emptyset$, $X \in \mathfrak{M}(\gamma)$, a jestliže $M \in \mathfrak{M}(\gamma)$, potom i $X \setminus M \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Buďte A, $B \in \mathfrak{M}(\gamma)$, chceme ukázat, že i $A \cup B \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Volme tedy testovací množinu $T \subset X$. Použijeme postupně T pro testování měřitelnosti A a $T \cap A$, $T \setminus A$ pro testování měřitelnosti B. Dostaneme (symbolem M^c budeme značit $X \setminus M$)

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &= \gamma(T \cap A) + \gamma(T \cap A^c),\\
\gamma(T \cap A) &= \gamma(T \cap A \cap B) + \gamma(T \cap A \cap B^c),\\
\gamma(T \cap A^c) &= \gamma(T \cap A^c \cap B) + \gamma(T \cap A^c \cap B^c),
\end{aligned}$$

takže (použijeme také subadditivitu γ)

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &= \gamma(T \cap A \cap B) + \gamma(T \cap A \cap B^c) + \gamma(T \cap A^c \cap B) + \gamma(T \cap A^c \cap B^c)\\
&\geq \gamma(T \cap (A \cup B)) + \gamma(T \cap (A \cup B)^c).
\end{aligned}$$

Mějme nyní posloupnost $\{E_j\}$ po dvou disjunktních γ-měřitelných množin. Indukcí dostaneme z předchozího, že pro každé $m = 1, 2, \ldots$ a pro každou testovací množinu $T \subset X$ je

$$\gamma(T) = \sum_{j=1}^{m} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{m} E_j) \tag{8.2}$$

Podrobněji: pro $m = 1$ je to měřitelnost E_1. Platí-li (8.2) pro m, použijeme testovací množinu $T \setminus \bigcup_{j=1}^{m} E_j$ na měřitelnost E_{m+1} a dostaneme

$$\gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{m} E_j) = \gamma(T \cap E_{m+1}) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{m+1} E_j). \tag{8.3}$$

Sečtením (8.2) a (8.3) dostaneme (8.2) pro $m + 1$. Z (8.2) máme hned

$$\gamma(T) \geq \sum_{j=1}^{m} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$$

a odtud limitním přechodem pro $m \to \infty$

$$\gamma(T) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j). \tag{8.4}$$

Nyní dokážeme, že pro $A_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$ je $\bigcup_j A_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Vyrobíme po dvou disjunktní E_j z A_j podle 1.13. Použijeme σ-subadditivitu γ na (8.4) a dostaneme

$$\begin{aligned}\gamma(T) &= \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \\ &\geq \gamma(T \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j),\end{aligned}$$

což dává γ-měřitelnost množiny

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Zbývá dokázat, že γ° je míra. Víme, že $\gamma(\emptyset) = 0$. Buď $\{E_j\}$ posloupnost po dvou disjunktních γ-měřitelných množin. Potom použijeme (8.4) na

$$T = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

(pro $\geq$) a σ-subadditivitu γ (pro $\leq$) a dostaneme

$$\gamma(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(E_j).$$

Úplnost míry γ° je snadná. $\square$

8.6. Základní konstrukce. Základní schéma konstrukce míry probíhá ve dvou krocích. Vyjdeme z nezáporné množinové funkce $(\mathcal{G}, \tau)$, od které nechceme téměř nic – předpokládáme jen počáteční podmínku (8.1). V prvním kroku vytvoříme podle 8.2 a 8.3 vnější míru τ^*, v druhém kroku pak podle 8.4 a 8.5 (úplnou) míru $(\mathfrak{M}(\tau^*), \tau^{*\circ})$. Pro výslednou míru zavedeme zkrácené značení

$$(\mathcal{G}', \tau') := (\mathfrak{M}(\tau^*), \tau^{*\circ}). \tag{8.5}$$

Konstrukci obvykle považujeme za úspěšnou, jestliže (G', τ') je rozšířením $(\mathcal{G}, \tau)$. Tento případ nastane při konstrukci Lebesgueovy míry, což uvidíme v následujících kapitolách.

8.7. Test měřitelnosti. *Nechť $(\mathcal{G}, \tau)$ je nezáporná množinová funkce na X splňující počáteční podmínku* (8.1) *a $H \subset X$ je libovolná množina. Nechť H splňuje podmínku*

$$\forall G \in \mathcal{G}: \quad G \cap H \in \mathcal{G}, \quad G \setminus H \in \mathcal{G}, \quad \tau(G) = \tau(G \cap H) + \tau(G \setminus H).$$

Potom $H \in \mathcal{G}'$.

Důkaz. Nechť $T \subset X$ je libovolná "testovací" množina. Nechť $\sum_j \tau(G_j)$ je horní součet k $\tau^*(T)$. Potom $\sum_j \tau(G_j \cap H)$ je horní součet k $\tau^*(T \cap H)$ a $\sum_j \tau(G_j \setminus H)$ je horní součet k $\tau^*(T \setminus H)$. Tedy

$$\tau^*(T \cap H) + \tau^*(T \setminus H) \leq \sum_j \tau(G_j \cap H) + \sum_j \tau(G_j \setminus H) = \sum_j \tau(G_j).$$

Přechodem k infimu přes všechny horní součty dostaneme

$$\tau^*(T \cap H) + \tau^*(T \setminus H) \leq \tau^*(T).$$

Tedy H je τ^*-měřitelná množina. $\square$

8.8. Věta o jednoznačnosti I. *Nechť $(\mathcal{G}, \tau)$ je nezáporná množinová funkce splňující počáteční podmínku* (8.1) *a $(\mathcal{S}, \mu)$ je míra, která rozšiřuje $(\mathcal{G}, \tau)$. Potom $\mu(E) \leq \tau'(E)$ pro všechna $E \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{G}'$. Jestliže τ' je σ-konečná, pak $\mu(E) = \tau'(E)$ pro všechna $E \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G}'$.*

Důkaz. Zvolme $E \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G}'$. Nechť $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(E_j)$ je horní součet k $\tau^*(E)$. Potom ze spočetné subadditivity μ dostaneme

$$\mu(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau(E_j)$$

a přechodem k infimu

$$\mu(E) \leq \tau^*(E) = \tau'(E).$$

Nyní předpokládejme, že τ' je σ konečná. Potom existují množiny $Y_k \in \mathcal{G}'$ tak, že $X = \bigcup Y_k$ a $\tau'(Y_k) < \infty$. Ke každé z množin Y_k můžeme najít konečný horní součet $\sum_i \tau(G_{k,i})$. Uspořádáme-li $\{G_{k,i}\}$ do posloupnosti X_j, máme $X_j \in \mathcal{G}$, $\bigcup X_j = X$ a $\tau(X_j) = \mu(X_j) < \infty$. Použijeme-li trik zdisjunktnění 1.13 na $\{X_j \cap E\}$, dostaneme po dvou disjunktní rozklad $E = \bigcup_j E_j$, kde $E_j \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G}'$ a $E_j \subset X_j$. Podle první části věty máme

$$\tau'(E_j) = \tau'(X_j) - \tau'(X_j \setminus E_j) \leq \mu(X_j) - \mu(X_j \setminus E_j) = \mu(E_j)$$

a sečtením

$$\tau'(E) \leq \mu(E).$$

□

8.9. Věta o jednoznačnosti II. *Nechť $(\mathcal{G}, \tau)$ je nezáporná množinová funkce splňující počáteční podmínku (8.1) a $(\mathcal{G}', \tau')$ je míra získaná základní konstrukcí 8.6. Předpokládejme, že τ' je rozšíření τ a že je σ-konečná. Potom τ' je nejužší rozšíření τ na úplnou míru.*

Důkaz. Víme, že τ' je rozšíření τ na úplnou míru, dokážeme, že nejužší. Nechť $(\mathcal{S}, \mu)$ je rozšíření $(\mathcal{G}, \tau)$ na úplnou míru. Podle věty 8.8 je $\tau' = \mu$ na $\mathcal{G}' \cap \mathcal{S}$, zbývá dokázat, že $\mathcal{G}' \subset \mathcal{S}$. Zvolme $E \in \mathcal{G}'$ tak, že $\tau'(E) < \infty$. Potom ke každému $k = 1, 2, \ldots$ existuje horní součet $\sum_j \tau(G^E_{k,j})$ k $\tau^*(E)$ tak, že

$$\sum_j \tau(G^E_{k,j}) < \tau^*(E) + \frac{1}{k}.$$

Položme

$$G^E = \bigcap_k \bigcup_j G^E_{k,j}.$$

Potom

$$G^E \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G}', \quad G^E \supset E \ \text{ a } \ \mu(G^E) = \tau'(G^E) = \tau'(E).$$

Buď $N = G^E \setminus E$. Potom analogicky utvoříme G^N tak, že

$$G^N \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G}', \quad G^N \supset N \ \text{ a } \ \mu(G^N) = \tau'(G^N) = \tau'(N) = 0.$$

Jelikož μ je úplná, je $N \in \mathcal{S}$ a $\mu(N) = 0$. Tedy $E = G_E \setminus N \in \mathcal{S}$. Uvažujme nyní obecnou $E \in \mathcal{G}'$. jelikož τ' je σ-konečná, můžeme napsat E jako $E = \bigcup_j E_j$, kde $E_j \in \mathcal{G}'$ a $\tau'(E_j) < \infty$. Podle předchozí části důkazu jsou $E_j \in \mathcal{S}$ a tudíž $E \in \mathcal{S}$. □

8.10. Hustota jednoduchých funkcí II. *Nechť $(\mathcal{G}, \tau)$ je nezáporná množinová funkce splňující počáteční podmínku (8.1) a $(\mathcal{G}', \tau')$ je míra získaná základní konstrukcí 8.6. Předpokládejme, že $(\mathcal{G}', \tau')$ je rozšíření $(\mathcal{G}, \tau)$. Potom $\mathcal{G}$-jednoduché funkce z $L^1(X, \mathcal{G}', \tau')$ jsou husté v $L^1(X, \mathcal{G}', \tau')$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{Y}$ je množina všech τ'-integrovatelných $\mathcal{G}$-jednoduchých funkcí a $\overline{\mathcal{Y}}$ je její uzávěr v $L^1(X, \mathcal{G}', \tau')$. Chceme dokázat, že $\overline{\mathcal{Y}} = L^1(X, \mathcal{G}', \tau')$. Podle věty 7.7 stačí ukázat, že $\chi_E \in \overline{\mathcal{Y}}$ pro každou množinu $E \in \mathcal{G}'$ konečné τ'-míry, neboť přechod k lineárním kombinacím je snadný. Zvolme k přirozené a najděme $G_{k,j} \in \mathcal{G}$ tak, že

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{k,j}$$

a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau'(G_{k,j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi(G_{k,j}) \leq \pi^*(E) + \frac{1}{k} = \tau'(E) + \frac{1}{k}.$$

Potom

$$f_k = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{G_{k,j}} \in \overline{\mathcal{Y}}$$

neboť řada definující f_k zřejmě konverguje v $L^1(X, \mathcal{G}', \tau')$. Dále

$$0 \le \chi_E \le f_k$$

a

$$\int_X |f_k - \chi_E| \, d\tau' = \int_X f_k \, d\tau' - \int_X \chi_E \, d\tau' = \sum_j \tau'(G_{k,j}) - \tau'(E) \le \frac{1}{k}.$$

Tedy $\chi_E \in \overline{\mathcal{Y}}$ a tím je důkaz završen. □

8.11. Okruh. Nechť X je abstraktní množina. Systém množin $\mathcal{O} \subset 2^X$ se nazývá *okruh*, je-li splněno

(O-1) $\emptyset \in \mathcal{O}$,

(O-2) $A, B \in \mathcal{O} \implies A \cup B \in \mathcal{O},\ A \setminus B \in \mathcal{O}$.

Zřejmě $A, B \in \mathcal{O}$ má též za následek $A \cap B \in \mathcal{O}$. Každá σ-algebra je okruh, ale pojem okruhu je mnohem obecnější.

8.12. Pramíra. Nechť X je abstraktní množina a $\mathcal{O} \subset 2^X$ je okruh. Množinová funkce $\pi : \mathcal{O} \to [0, \infty]$ se nazývá *pramíra*, jestliže splňuje

(Pr-1) $\pi(\emptyset) = 0$,

(Pr-2) jestliže $A \in \mathcal{O}$, $A_j \in \mathcal{O}$, $j = 1, 2, \dots$, A_j jsou po dvou disjunktní a $A = \bigcup_j A_j$, potom

$$\pi(A) = \sum_j \pi(A_j).$$

Požadavek, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je okruh, je součástí definice pramíry. V případě pramíry se může stát, že sjednocení po dvou disjunktních množin z $\mathcal{O}$ neleží v $\mathcal{O}$, což není v rozporu s (Pr-2).

Řekneme, že pramíra π na $\mathcal{O}$ je *σ-konečná*, jestliže existují $X_j \in \mathcal{O}$ tak, že

$$\pi(X_j) < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{a} \quad X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j.$$

8.13. Hopfova věta. *Nechť $\mathcal{O}$ je okruh podmnožin X a π je pramíra na $\mathcal{O}$. Nechť $\mathcal{S}_0$ je nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{O}$. Potom existuje míra μ_0 na $\mathcal{S}_0$, která rozšiřuje π. Jestliže π je σ-konečná, pak je taková míra μ_0 na $\mathcal{S}_0$ určena jednoznačně.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že π' je rozšíření π. Zvolme $A \in \mathcal{O}$. Potom podle tvrzení 8.7 je $A \in \mathfrak{M}(\pi^*) = \mathcal{O}'$. Potřebujeme ukázat, že

$$\pi(A) = \pi^*(A) \ (= \pi'(A)).$$

Jelikož $\pi(A)$ je horní součet k $\pi^*(A)$, máme

$$\pi^*(A) \le \pi(A).$$

Nechť $A_j \in \mathcal{O}$, $j = 1, 2, \dots$, $\bigcup_j A_j \supset A$. Vytvořme z $\{A_j\}$ po dvou disjunktní systém $\{E_j\}$ podle 1.13. Pak podle (Pr-2)

$$\pi(A) = \sum_j \pi(A \cap E_j) \le \sum_j \pi(E_j) \le \sum_j \pi(A_j).$$

Přejdeme-li na pravé straně k infimu přes všechny horní součty, dostaneme

$$\pi(A) \le \pi^*(A).$$

Tím jsme dokázali, že π' je rozšíření π. Míra $\pi' \lfloor \mathcal{S}_0$ je hledané rozšíření π na $\mathcal{S}_0$. Je-li navíc π σ-konečná, pak z věty 8.8 plyne jednoznačnost takového rozšíření. □

9. Lebesgueova míra

V této kapitole splatíme dluh z prvé kapitoly a ukážeme, že existuje Lebesgueova míra.

9.1. Lebesgueova míra v $\mathbf{R}^n$. V 1.16 jsme zadefinovali Lebesgueovu míru $(\mathfrak{M}, \lambda) = (\mathfrak{M}_n, \lambda_n)$ jako nejužší úplnou míru v $\mathbf{R}^n$, která každému n-rozměrnému intervalu Q přiřadíme jeho *objem*, tedy rozšiřuje množinovou funkci $(\mathcal{I}, \ell) = (\mathcal{I}_n, \ell_n)$.

Problém této definice tkví v tom, že existence Lebesgueovy míry není zřejmá. Abychom ji dokázali, pomocí základní konstrukce sestrojíme míru $(\mathcal{I}', \ell') = (\mathcal{I}_n', \ell_n')$ (značení jako v 8.6) a ověříme, že tato míra má požadované vlastnosti.

Předpokládejme, že víme, že $(\mathcal{I}', \ell')$ je rozšíření $(\mathcal{I}, \ell)$. Potom podle věty 8.9 je $(\mathcal{I}', \ell')$ nejužší rozšíření $(\mathcal{I}, \ell)$ na úplnou míru, neboť požadavek σ-konečnosti je zřejmě splněn. Našim úkolem je tedy dokázat ℓ^*-měřitelnost n-rozměrných intervalů a rovnost $\ell^*(Q) = \ell(Q)$ pro tyto intervaly.

9.2. Měřitelnost borelovských množin. *Každá borelovská podmnožina* $\mathbf{R}^n$ *je* ℓ^**-měřitelná.*

Důkaz. Nechť H je poloprostor tvaru $\{x \in \mathbf{R}^n : x_i < a\}$, kde $a \in \mathbf{R}$. Potom pro každý interval $Q \in \mathcal{I}_n$ je

$$Q \cap H \in \mathcal{I}_n, \quad Q \setminus H \in \mathcal{I}_n \quad \text{a} \quad \ell(Q \cap H) + \ell(Q \setminus H) = \ell(Q).$$

Tedy $H \in \mathfrak{M}_n$ podle tvrzení 8.7. Jelikož borelovská σ-algebra je zřejmě generovaná takovými poloprostory a $\mathfrak{M}(\ell^*)$ je σ-algebra, je $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \subset \mathfrak{M}(\ell^*)$. □

9.3. Vnější míra intervalu. *Je-li* $Q \in \mathcal{I}$, *pak* $\ell^*(Q) = \ell(Q)$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že interval Q je kompaktní, tj. uzavřený a omezený. Zvolme $\varepsilon > 0$. Najdeme posloupnost $\{G_k\}$ intervalů tak, že

$$Q \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(G_k) < \ell^*(I) + \varepsilon.$$

Můžeme předpokládat, že G_k jsou otevřené a jejich meze jsou racionální, neboť každý interval G je obsažen v otevřeném intervalu G' s racionálními mezemi, jehož objem se od objemu G libovolně málo liší. Potom ovšem z kompaktnosti I plyne, že existuje m přirozené tak, že

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{m} G_k.$$

Máme vyjádření

$$I = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n],$$
$$G_k = (a_k^1, b_k^1) \times \cdots \times (a_k^n, b_k^n), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

kde všechna čísla a^i, b^i, a^i_j, b^i_j jsou racionální. Buď q jejich nejmenší společný jmenovatel. Uvažujme množinu krychlí

$$\mathcal{Q} = \Big\{ \big(\tfrac{z_1}{q}, \tfrac{z_1+1}{q}\big) \times \cdots \times \big(\tfrac{z_n}{q}, \tfrac{z_n+1}{q}\big) : \ z \in \mathbf{Z}^n \Big\}.$$

a pro $Q \in \mathcal{Q}$ označme

$$\beta_k^Q = \begin{cases} 1, & \text{když } Q \subset G_k, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Máme

$$\ell(Q) \le \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \ell(Q) \le \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \sum_{k=1}^{n} \beta_k^Q \ell(Q_\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \beta_k^Q \ell(Q_\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \ell(G_k).$$

Tím je důkaz hotov pro kompaktní interval. V obecném případě dokončíme důkaz tak, že Q budeme aproximovat posloupností kompaktních intervalů zevnitř. □

9.4. Věta o existenci Lebesgueovy míry. *Lebesgueova míra v* $\mathbf{R}^n$ *existuje. Každá borelovská množina je* λ*-měřitelná.*

Důkaz. Důkaz plyne z vět 9.2, 9.3 a diskuse v 9.1. □

9.5. Vnější Lebesgueova míra. Nechť $\mathcal{U}$ je systém všech otevřených podmnožin $\mathbf{R}^n$. Vytvořme-li z množinových funkcí λ a $\lambda\lfloor\mathcal{U}$ funkce λ^* a $(\lambda\lfloor\mathcal{U})^*$ podle 8.2, Množinová funkce λ^* se nazývá *Lebesgueova vnější míra.* Buď $E \subset \mathbf{R}^n$ libovolná množina. Zřejmě platí

$$\lambda^*(E) \le \ell^*(E), \qquad \lambda^*(E) \le (\lambda\lfloor\mathcal{U})^*.$$

Uvažujme posloupnost E_j měřitelných množin. Potom

$$\lambda\Big(\bigcup_j E_j\Big)) \le \sum_j \lambda(E_j)$$

a tudíž

$$\lambda^*(E) = \inf\Big\{\lambda(A) :\ A \text{ měřitelná},\ A \supset E\Big\},$$
$$(\lambda\lfloor\mathcal{U})^*(E) = \inf\Big\{\lambda(G) :\ G \text{ otevřená},\ G \supset E\Big\},$$
$$\ell^*(E) \geq \inf\Big\{\lambda(G) :\ G \text{ otevřená},\ G \supset E\Big\}.$$

V poslední nerovnosti jsme využili, že v definici ℓ^* stačí uvažovat horní součty z otevřených intervalů a sjednocení otevřených intervalů je otevřená množina. Nechť $A \supset E$ je měřitelná. Potom

$$\ell^*(E) \leq \ell^*(A) = \lambda(A)$$

a přechodem k infimu přes všechny měřitelné nadmnožiny E dostaneme

$$\ell^*(E) \leq \lambda^*(E).$$

Tedy všechny množinové funkce sledované v tomto odstavci jsou stejné, máme

$$\ell^*(E) = \lambda^*(E) = (\lambda\lfloor\mathcal{U})^*(E) = \inf\Big\{\lambda(G) :\ G \text{ otevřená},\ G \supset E\Big\}. \tag{9.1}$$

9.6. Lebesgueova míra a topologie. *Nechť $E \subset \mathbf{R}^n$ je λ-měřitelná množina. Potom*

(a) *existuje posloupnost $\{G_j\}$ otevřených množin tak, že*

$$G_j \supset E \ \text{a}\ \lambda(G_j \setminus E) \to 0,$$

(b) *existuje posloupnost $\{F_j\}$ uzavřených množin tak, že*

$$F_j \subset E \ \text{a}\ \lambda(E \setminus F_j) \to 0,$$

(c) *existuje posloupnost $\{K_j\}$ kompaktních množin tak, že*

$$K_j \subset E \ \text{a}\ \lambda\Big(E \setminus \bigcup_j K_j\Big) = 0.$$

Důkaz. (a) dostaneme přímo z (9.1), pokud $\lambda(E) < \infty$, jinak rozložíme E na po dvou disjunktní sjednocení měřitelných množin E_k, najdeme otevřené nadmnožiny $G_{k,j}$ k E_k tak, aby

$$\lambda(G_{k,j} \setminus E_i) < 2^{-k-j}$$

a použijeme

$$G_j = \bigcup_k G_{k,j}$$

(b) dostaneme z (a) přechodem k doplňkům.

(c) Podle (b) existuje posloupnost $\{F_k\}$ uzavřených množin tak, že

$$F_k \subset E \text{ a } \lambda\Big(E \setminus \bigcup_k K_k\Big) = 0.$$

Množiny $F_k \cap [-m,m]^n$, $k, m = 1, 2, \dots$, jsou kompaktní a lze je uspořádat do posloupnosti. □

10. Součin měr a Fubiniova věta

10.1. Součin měr. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ-konečné. Uvažujme systém $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ všech podmnožin $X \times Y$ tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. Takovým množinám budeme říkat *měřitelné obdélníky.* Na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ definujeme množinovou funkci $\mu \times \nu$ předpisem

$$\mu{\times}\nu\ (A \times B) = \mu(A)\,\nu(B).$$

Definujeme *součin měr* $\mu\otimes\nu$ jako nejužší míru na $X \times Y$, která každému měřitelnému obdélníku $Q \in A{\times}B$ přiřadí $\mu{\times}\nu\ (Q)$. Dále definujeme *úplný součin měr* $\overline{\mu \otimes \nu}$ jako nejužší rozšíření $\mu \times \nu$ na úplnou míru. Podobně jako u Lebesgueovy míry je třeba ukázat existenci nejužšího prvku ve třídě možných rozšíření.

10.2. Měřitelnost měřitelných obdélníků. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Potom každý měřitelný obdélník je $(\mu{\times}\nu)^*$-měřitelný.*

Důkaz. Uvažujme množinu $E \in \mathcal{S}$. Chceme dokázat $(\mu \times \nu)^*$-měřitelnost množiny $E \times Y$. Buď $A \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ měřitelný obdélník. Potom

$$(A \times B) \cap (E \times Y) = (A \cap E) \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}, \quad (A \times B) \setminus (E \times Y) = (A \setminus E) \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$$

a

$$(\mu \times \nu)((A \times B) \cap (E \times Y)) + (\mu \times \nu)((A \times B) \setminus (E \times Y)) = (\mu \times \nu)(A \times B).$$

Tedy $E \times Y$ je $(\mu \times \nu)^*$-měřitelná podle tvrzení 8.7. Podobně bychom dostali měřitelnost $X \times F$ pro každou $F \in \mathcal{T}$. Tedy

$$E \times F = (E \times Y) \cap (X \times F) \in \mathfrak{M}((\mu \times \nu)^*).$$

□

10.3. Vnější míra měřitelného obdélníku. *Je-li $A \in \mathcal{S}$ a $B \in \mathcal{T}$, pak*

$$(\mu{\times}\nu)^*(A{\times}B) = \mu{\times}\nu\ (A{\times}B).$$

Důkaz. Nechť

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu{\times}\nu\ (A_j \times B_j)$$

je horní součet k $(\mu \times \nu)^*(A \times B)$. Potom pro každý bod $x \in X$ je

$$\nu(B)\chi_A(x) \le \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)\chi_{A_j}(x).$$

Podle věty 5.4 (a) je

$$\begin{aligned}(\mu{\times}\nu)(A{\times}B) &= \int_X \nu(B)\chi_A \, d\mu \le \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)\chi_{A_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \nu(B_j)\chi_{A_j} \, d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(A_j \times B_j).\end{aligned}$$

□

10.4. Existence součinu měr. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ-konečné. Nechť $\mathcal{U}$ je nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$. Potom $(\mu{\times}\nu)'$ je úplný součin měr μ a ν a $(\mu{\times}\nu)' \lfloor \mathcal{U}$ je součin měr μ a ν.*

Důkaz. Důkaz plyne z vět 10.2, 10.3 a 8.9. □

10.5. Poznámka. Z vět 10.2, 10.3 vidíme, že rozšíření $\mu{\times}\nu$ na (úplnou) míru můžeme provést bez omezujících předpokladů, avšak pokud míry μ a ν nejsou σ-konečné, mohli bychom ztratit jednoznačnost, kterou potřebujeme k nalezení *nejužšího* rozšíření.

10.6. Řezy a projekce. Nechť $M \subset X \times Y$. Značíme

$$M^x\{y \in Y : (x, y) \in M\}, \qquad x \in X \quad \text{(řez)},$$
$$\Pi_X(M) = \{x \in X : M^x \neq \emptyset\} \quad \text{(projekce)}.$$

10.7. Fubiniova věta. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ-konečné. Buď $(\mathcal{R}, \rho)$ úplný součin měr μ a ν. Nechť f je ρ-měřitelná funkce na ρ-měřitelné množině $M \subset X \times Y$. Nechť P je měřitelná množina obsahující $\Pi_X(M)$. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y)\, d\rho(x, y)$$

má smysl. Potom pro μ-skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^x} f(x, y)\, d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_P g \, d\mu$$

a

$$\int_M f(x, y)\, d\rho(x, y) = \int_X g \, d\mu = \int_P \Big(\int_{M^x} f(x, y)\, d\nu(y) \Big) d\mu(x). \tag{10.1}$$

Důkaz. Především můžeme předpokládat, že $M = X \times Y$, neboť ρ-měřitelnou funkci f na M můžeme dodefinovat nulou na doplňku M a tím získat měřitelnou funkci na $X \times Y$. K tomu, že integrace probíhá přes množiny M^x, je zapotřebí mít měřitelnost množin M^x, ale tu dostaneme z Fubiniovy věty pro charakteristickou funkci množiny M na $X \times Y$. Důkaz Fubiniovy věty postupuje v několika krocích. Především, 10.1 určitě platí, je-li f charakteristická funkce měřitelného obdélníku, a odtud hned dostáváme 10.1 pro $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$-jednoduché funkce. Nechť f je ρ-integrovatelná funkce. Podle věty 8.10 existují $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$-jednoduché funkce f_j tak, že

$$\int_{X\times Y} |f - f_j| \, d\rho < 2^{-j}, \qquad j = 1, 2, \dots$$

Potom

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{X\times Y} |f_{j+1} - f_j| \, d\rho < \infty.$$

Položme

$$g_j(x) = \int_Y f_j(x, y) \, d\nu(y).$$

Podle předchozího kroku je každá funkce g_j μ-měřitelná a

$$\int_X g_j \, d\mu = \int_{X\times Y} f_j \, d\rho.$$

Jelikož

$$\sum_j \int_X |g_{j+1} - g_j| \, d\mu = \sum_j \int_{X\times Y} |f_{j+1} - f_j| \, d\rho < \infty,$$

je podle věty 5.4

$$\begin{aligned}\int_X g \, d\mu &= \int_X g_1 \, d\mu + \sum_j \int_X (g_{j+1} - g_j) \, d\mu \\ &= \int_{X\times Y} f_1 \, d\rho + \sum_j \int_{X\times Y} (f_{j+1} - f_j) \, d\rho = \int_{X\times Y} f \, d\rho.\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden pro ρ-integrovatelné funkce. V dalším kroku využijeme σ-konečnosti a najdeme množiny $X_k \in \mathcal{S}$ a $Y_k \in \mathcal{T}$ tak, že

$$\mu(X_k) < \infty, \quad \nu(Y_k) < \infty, \quad X_1 \subset X_2, \dots, \quad Y_1 \subset Y_2, \dots.$$

Je-li f nezáporná ρ-měřitelnou funkce, pak funkce

$$f_k = \min\{f, k\} \chi_{X_k \times Y_k}$$

jsou ρ-integrovatelné, použijeme na ně předchozí krok a na limitní přechod $f_k \to f$ Leviho větu 5.2. Konečně je-li f libovolná měřitelná funkce taková, že $\int_{X\times Y} f_1 \, d\rho$ má smysl, dokončíme důkaz rozkladem na kladnou a zápornou část. □

10.8. Varování. Je-li $M \in \mathcal{R}$, nemusí být $\Pi_X(M) \in \mathcal{S}$.

10.9. Součiny konečně mnoha měr. Zcela stejně bychom "vynásobili" konečně mnoho prostorů s měrami $(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, pouze výklad by byl méně přehledný pro velké množství indexů. Také můžeme převést úlohu na předchozí rekurentním násobením, např.

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n = \big(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}\big) \otimes \mu_n.$$

10.10. Lebesgueova míra a součin měr. *$n + m$-rozměrná Lebesgueova míra je úplným součinem n-rozměrné a m-rozměrné Lebesgueovy míry.*

Důkaz. Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$ je měřitelná. Podle věty 9.6 (a) existují otevřené množiny $G_j \subset \mathbf{R}^n$ a nulová množina $N \subset \mathbf{R}^n$ tak, že

$$A = \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j\Big) \setminus N$$

Potom

$$A \times \mathbf{R}^m = \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \times \mathbf{R}^m\Big) \setminus (N \times \mathbf{R}^m),$$

tedy $A \times \mathbf{R}^m$ je λ_{n+m}-měřitelná. Podobně $\mathbf{R}^n \times B$ je λ_{n+m}-měřitelná pro každou λ_m měřitelnou B. Tedy "měřitelné obdélníky" jsou λ_{m+n}-měřitelné. Odtud plyne, že jak λ_{n+m} je nejužší úplná míra, v níž jsou všechny měřitelné obdélníky měřitelné a je to tedy úplný součin měr λ_n a λ_m. □

10.11. Příklad. Nechť $N \subset \mathbf{R}$ je neměřitelná množina. Potom $N \times \mathbf{R}$ je λ_2-nulová v $\mathbf{R}^2$, tudíž λ_2-měřitelná, ale není $\lambda_1 \otimes \lambda_1$-měřitelná. Předchozí věta tedy ztratí platnost, nahradíme-li úplný součin obyčejným součinem.

10.12. Příklad. Počítejme

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{4} &= [\operatorname{arctg}^2 x]_{x=0}^{\infty} = \int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,[\operatorname{arctg}(yx)]_{y=0}^{1}\,dx \\
&= \int_0^{\infty} \Big(\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)(1+y^2x^2)}\,dy \Big)\,dx \\
&= \int_0^{1} \Big(\int_0^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)(1+y^2x^2)}\,dx \Big)\,dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2} \Big[\ln \frac{1+x^2}{1+x^2y^2} \Big]_{x=0}^{\infty}\,dy \\
&= -2 \int_0^1 \frac{\ln y}{1-y^2}\,dy = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 y^{2n} \ln y\,dy \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.
\end{aligned}$$

(odůvodněte samostatně použití Fubiniovy věty a záměnu řady a integrálu). Označme

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots, \\
L &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots, \\
V &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots.
\end{aligned}$$

Potom máme

$$V = L + S, \quad V = 2^2 S, \quad L = \frac{\pi^2}{8},$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = V = \frac{4}{3} L = \frac{\pi^2}{6}.$$

11. Věta o substituci

11.1. Jacobiho matice, jakobián. Nechť $G \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina a $f = (f^1, \dots, f^n) : G \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení diferencovatelné v bodě $x \in G$. Matice lineárního zobrazení $f'(x)$ se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení f v bodě x. Je to tedy matice

$$\Big(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x) \Big)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Pokud $m = n$, determinant Jacobiho matice se nazývá *jakobián* zobrazení f v bodě x a značí se $J_f(x)$.

11.2. Difeomorfismus. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $m \geq n$. Zobrazení $f : G \to \mathbf{R}^m$ nazveme *difeomorfismem*, jestliže je homeomorfní, má spojitou derivaci a jeho Jacobiho matice má všude v G hodnost n.

11.3. Věta o substituci. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbf{R}^n$ je difeomorfismus. Nechť u je měřitelná funkce na $f(G)$. Potom*

$$\int_{f(G)} u(y)\,dy = \int_G u(f(x))|J_f(x)|\,dx,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Důkaz odložíme na později (12.17), kde ho provedeme současně se složitějším případem. $\square$

11.4. Polární souřadnice. Nechť

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : \ r > 0, \ -\pi < \alpha < \pi \right\}.$$

Zobrazení $f : G \to \mathbf{R}^2$ dané předpisem

$$\begin{aligned} f(r,\alpha) &:= \begin{pmatrix} x(r,\alpha) \\ y(r,\alpha) \end{pmatrix}, \\ x(r,\alpha) &:= r\ \cos\alpha, \\ y(r,\alpha) &:= r\ \sin\alpha \end{aligned}$$

se nazývá *zobrazení polárních souřadnic.*

11.5. Věta o polárních souřadnicích. *Nechť $f : G \to \mathbf{R}^2$ je zobrazení polárních souřadnic. Potom f je difeomorfismus a $J_f(r,\alpha) = r$. Je-li $M \subset \mathbf{R}^2$ měřitelná množina a u měřitelná funkce na M, potom*

$$\int_M u(x,y)\,dx\,dy = \int_{G \cap f^{-1}(M)} r\,u(r\ \cos\alpha,\ r\ \sin\alpha)\,dr\,d\alpha, \tag{11.1}$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} r\ \cos\alpha &= x, \\ r\ \sin\alpha &= y \end{aligned}$$

s podmínkou $\binom{r}{\alpha} \in G$ má právě jedno řešení

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \alpha &= \operatorname{sign} y\ \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

pokud $\binom{x}{y} \notin N := (-\infty, 0] \times \{0\}$. Ověření hladkosti a výpočet jakobiánu je rutinní záležitost. Vzorec (11.1) dostaneme z věty o substituci 11.3, uvážíme-li, že $\lambda(N) = 0$. $\square$

11.6. Sférické souřadnice. Nechť tentokrát

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \sigma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \ r > 0, \ -\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}, \ -\pi < \delta < \pi \right\}.$$

Zobrazení $f : G \to \mathbf{R}^3$ dané předpisem

$$\begin{aligned} f(r,\sigma,\delta) &:= \begin{pmatrix} x(r,\sigma,\delta) \\ y(r,\sigma,\delta) \\ z(r,\sigma,\delta) \end{pmatrix}, \\ x(r,\sigma,\delta) &:= r\ \cos\sigma\ \cos\delta, \\ y(r,\sigma,\delta) &:= r\ \cos\sigma\ \sin\delta, \\ z(r,\sigma,\delta) &:= r\ \sin\sigma \end{aligned}$$

se nazývá *zobrazení sférických souřadnic.*

11.7. Věta o sférických souřadnicích. *Nechť $f : G \to \mathbf{R}^3$ je zobrazení sférických souřadnic. Potom f je difeomorfismus a $J_f(r,\sigma,\delta) = -r^2\cos\sigma$. Je-li $M \subset \mathbf{R}^3$ měřitelná množina a u měřitelná funkce na M, potom*

$$\begin{aligned} &\int_M u(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{G \cap f^{-1}(M)} r^2 \cos\sigma\, u(r\cos\sigma\cos\delta,\ r\cos\sigma\sin\delta,\ r\sin\sigma)\,dr\,d\sigma\,d\delta, \end{aligned} \tag{11.2}$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Soustava rovnic

$$
\begin{aligned}
r \cos\sigma \cos\delta &= x,\\
r \cos\sigma \sin\delta &= y,\\
r \sin\sigma &= z
\end{aligned}
$$

s podmínkou $\begin{pmatrix} r\\ \sigma\\ \delta \end{pmatrix} \in G$ má právě jedno řešení

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2},\\
\sigma &= \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\
\delta &= \operatorname{sign} y \ \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}
$$

pokud $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \notin N := (-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbf{R}$. Ověření hladkosti a výpočet jakobiánu je rutinní záležitost. Vzorec (11.2) dostaneme z věty o substituci 11.3, uvážíme-li, že $\lambda(N) = 0$. □

12. k-ROZMĚRNÁ MÍRA V $\mathbf{R}^n$

12.1. Lipschitzovská zobrazení. Nechť $E \subset \mathbf{R}^m$ a $f : E \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení. Řekneme, že f je *lipschitzovské*, existuje-li konstanta $\beta \geq 0$ tak, že

$$|f(x') - f(x)| \leq \beta\, |x' - x|, \qquad x, x' \in E.$$

Nejmenší takovou konstantu β značíme $\operatorname{lip} f$. Pokud zobrazení f není lipschitzovské, píšeme $\operatorname{lip} f = \infty$.

Nechť $G \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená. Zobrazení $f : G \to \mathbf{R}^n$ se nazývá *lokálně lipschitzovské*, jestliže ke každému bodu $x \in G$ existuje okolí $U \subset G$ bodu x tak, že f je lipschitzovské na U.

V dalším se budeme zabývat mírou lipschitzovského obrazu množiny.

12.2. Vitaliova věta o pokrytí. *Nechť $G_0 \subset \mathbf{R}^m$ je otevřená množina konečné míry a $E \subset G_0$. Nechť $\mathcal{U}$ je systém otevřených koulí v G_0. Nechť*

(Vi) *pro každou otevřenou množinu $G \subset G_0$ je*

$$E \cap G \subset \bigcup \{B \in \mathcal{U} : B \subset G\}.$$

Potom existuje konečná nebo spočetná posloupnost $\{B(x_j, r_j)\}$ po dvou disjunktních koulí z $\mathcal{U}$ tak, že pro každé k přirozené je

$$E \setminus \bigcup_{j \leq k} \overline{B}(x_j, r_j) \subset \bigcup_{j > k} B(x_j, 5r_j) \tag{12.1}$$

Důkaz. Definujme rekurentně posloupnost $\{B_j\}$ otevřených koulí $B_j = B(x_j, r_j)$ v G_0. V j-tém kroku, $j \geq 1$, známe všechny koule $B_1, \dots, B_{j-1}$. Označme

$$G_{j-1} = G_0 \setminus (\overline{B}_1 \cup \dots \cup \overline{B}_{j-1}),$$

Potom G_{j-1} je otevřená množina a pro $j = 1$ je $G_{j-1} = G_0$. Pokud $E \cap G_{j-1} = \emptyset$, konstrukci ukončíme. Jinak označíme

$$\rho_j = \sup\{r > 0 : \text{ existuje } B(x, r) \in \mathcal{U},\ B(x, r) \subset G_{j-1}\}.$$

(Kdyby třeba $\mathcal{U}$ by byl systém všech koulí, byl by to "poloměr vepsané koule" k G_{j-1}). Najdeme kouli $B_j = B(x_j, r_j) \in \mathcal{U}$ tak, že $B_j \subset G_{j-1}$ a

$$r_j \geq \frac{1}{2}\rho_j. \tag{12.2}$$

Tím je j-tý krok ukončen. Zřejmě jsme vytvořili po dvou disjunktní systém koulí. Pokud je posloupnost $\{B_j\}$ je konečná, je tvrzení věty zřejmé, nechť tedy jde o nekonečnou posloupnost. Disjunktnost B_j využijeme k odhadu

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) \leq \lambda(G_0) < \infty. \tag{12.3}$$

Odtud s pomocí (12.2) dostáváme, že

$$\rho_j \le 2r_j \to 0. \tag{12.4}$$

Zvolme bod $z \in E \cap G_k$. Potom podle (Vi) existuje $B(x,r) \in \mathcal{U}$ tak, že

$$z \in B(x,r) \subset G_k.$$

Kdyby bylo $B(x,r) \subset G_j$ pro všechna j, bylo by $\rho_{j+1} \ge r$ a to by byl spor s (12.4). Najdeme nejmenší index q tak, že $B_q \cap B(x,r) \ne \emptyset$, a bod $y \in B_q \cap B(x,r)$. Určitě $q > k$. Jelikož q je nejmenší, je $B(x,r) \subset G_{q-1}$ a tudíž $\rho_q \ge r$. Tedy podle (12.2)

$$r \le \rho_q \le 2r_q$$

a z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$|z - x_q| \le |z - y| + |y - x_q| \le 2r + r_q \le 5r_q,$$

tedy $z \in B(x_q, 5r_q)$. Dostali jsme

$$E \cap G_k \subset \bigcup_{q=k+1}^{\infty} B(x_q, 5r_q),$$

což je (12.1) □

12.3. Lemma o míře lipschitzovského obrazu I. *Nechť $E \subset \mathbf{R}^m$ je λ-měřitelná množina a $f : E \to \mathbf{R}^m$ je lokálně lipschitzovské zobrazení. Potom $f(E)$ je λ_m-měřitelná množina a*

$$\lambda_m(f(E)) \le \big(\operatorname{lip} f\big)^m \lambda_m(E). \tag{12.5}$$

Důkaz. Označme

$$\beta = \operatorname{lip} f.$$

Pro důkaz nerovnosti (12.5) můžeme předpokládat, že $\beta < \infty$ a $\lambda(E) < \infty$. Zvolme otevřenou množinu $G \supset E$ konečné míry. Vytvoříme posloupnost $\{B_k\}$ koulí $B_k = \{B(x_k, r_k)\}$ podle Vitaliovy věty 12.2 aplikované na systém všech koulí v G. Zvolme $\tau > 1$. Podle (12.3) najdeme k přirozené tak, že

$$\sum_{j=k}^{\infty} \lambda(B_j) < \tau - 1.$$

Podle (12.1)

$$E \subset \bigcup_{j \le k} B(x_j, \tau r_j) \ \cup \ \bigcup_{j > k}^{\infty} B(x_j, 5r_j),$$

Máme

$$f(E \cap B(x,r)) \subset B(f(x), \beta r)$$

pro každou kouli B, tedy

$$f(E) \subset \bigcup_{j \le k} B(f(x_j), \beta\tau r_j) \cup \bigcup_{j > k} B(f(x_j), 5\beta r_j)$$

Odtud

$$\lambda^*(f(E)) \le \beta\tau^m \sum_{j \le k} \lambda B(x_j, r_j) + 5^m\beta^m \sum_{j > k} \lambda B(x_j, r_j) \le \tau^m\beta^m\lambda(G) + 5^m\beta^m(\tau - 1).$$

Limitním přechodem $\tau \to 1$ dostáváme

$$\lambda^*(f(E)) \le \beta^m \lambda(G).$$

a přechodem k infimu přes všechny otevřené množiny $G \supset E$ dostáváme

$$\lambda^*(f(E)) \le \beta^m \lambda(E).$$

Zbývá dokázat, že $f(E)$ je měřitelná množina. Podle věty 9.6 (c) existuje posloupnost $\{K_j\}$ kompaktních množin a λ-nulová množina N tak, že

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \cup N.$$

Potom

$$f(E) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j) \ \cup f(N).$$

Množiny $f(K_j)$ jsou kompaktní a tudíž měřitelné. Množinu N můžeme pokrýt posloupností U_j otevřených podmnožin G tak, že na každé U_j je f β_j-lipschitzovské, $\beta_j < \infty$. Jelikož

$$\lambda^*(f(N \cap U_j)) \le \beta_j^m \lambda(N) = 0, \qquad j = 1, 2, \dots,$$

je množina $\lambda^*(f(N)) = 0$ a tudíž je $f(N)$ také měřitelná. Tedy $f(E)$ je měřitelná množina. $\square$

12.4. Důsledek o invarianci λ vůči izometrii. *Nechť $E \subset \mathbf{R}^m$ je λ-měřitelná množina a $f : E \to \mathbf{R}^m$ je izometrické zobrazení. Potom $f(E)$ je λ-měřitelná množina a*

$$\lambda(f(E)) = \lambda(E).$$

12.5. Značení z lineární algebry. Kanonickou bázi prostoru $\mathbf{R}^m$ značíme $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ bez ohledu na dimenzi m.

Množinu všech uspořádaných k-tic indexů z $\{1, \dots, n\}$ značíme $\{1, \dots, n\}^k$ a její prvky nazýváme *multiindexy*. Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \{1, \dots, k\}$ nazveme rostoucím, jestliže $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$. Množinu všech rostoucích multiindexů $\alpha \in \{1, \dots, n\}^k$ značíme $I(n,k)$. S prostorem $\mathbf{R}^{I(n,k)}$ zacházíme podobně jako s prostorem $\mathbf{R}^m$; jsou-li $\vec{u} = (u_\alpha)_{\alpha \in I(n,k)}$, $\vec{v} = (v_\alpha)_{\alpha \in I(n,k)}$ jeho dva prvky, zavádíme skalární součin

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{\alpha \in I(n,k)} u_\alpha v_\alpha$$

a normu

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Jsou-li $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ lineární prostory, značíme $\mathrm{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ množinu všech lineárních zobrazení (homomorfismů) prostoru $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$. Matici reprezentující lineární zobrazení $A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^d)$ značíme $[A]$. Je-li $T \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^d)$, značíme

$$\|T\| = \sup\{|Tx| : \ x \in \mathbf{R}^m, \ |x| \le 1\}.$$

normu zobrazení T. Norma lineárního zobrazení je speciální případ lipschitzovské konstanty:

$$\|T\| = \operatorname{lip} T.$$

12.6. Jakobián. Pro diferencovatelnou funkci u na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^m$ používáme značení

$$\nabla u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \vec{e}_i.$$

Potom Jacobiho matice zobrazení $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : G \to \mathbf{R}^n$ se dá napsat jako

$$\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_m}\Big),$$

ale také

$$\Big(\nabla \varphi_1, \dots, \nabla \varphi_n\Big)^T.$$

Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení diferencovatelné v $t \in G$. Nechť $\alpha \in I(n,k)$, nebo obecněji $\alpha \in \{1, \dots, n\}^k$. Potom definujeme

$$J_\varphi^\alpha(t) = \det\Big(\frac{\partial \varphi_{\alpha_i}}{\partial t_j}(t)\Big)_{i,j=1}^k = \det\Big(\nabla \varphi_{\alpha_1}(t), \dots, \nabla \varphi_{\alpha_k}(t)\Big).$$

Čísla $J_\varphi^\alpha(t)$, $\alpha \in I(n,k)$, jsou *souřadnice jakobiánu* funkce φ v bodě t. Jakobián je tedy

$$J_\varphi(t) = (J_\varphi^\alpha(t))_{\alpha \in I(n,k)} \in \mathbf{R}^{I(n,k)}.$$

Jestliže multiindex $\alpha \in \{1, \dots, n\}^k$ není rostoucí, funkci J_φ^α sice zavádíme, ale nepočítáme ji mezi souřadnice jakobiánu. Oproti souřadnicím nedává žádnou novou informaci. Pokud je α sudá permutace nějakého multiindexu $\alpha' \in I(n,k)$, pak $J_\varphi^\alpha = J_\varphi^{\alpha'}$, v případě liché permutace je to $J_\varphi^\alpha = -J_\varphi^{\alpha'}$ a pokud α nelze vyjádřit permutací, vyskytuje se v něm opakování a je $J_\varphi^\alpha = 0$.

Je-li $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$ lineární zobrazení, pak ve shodě s předchozím značíme

$$J_A^\alpha = \det\Big(A_{\alpha_i}(\vec{e}_j)\Big)_{i,j=1}^k.$$

a

$$J_A = (J_A^\alpha)_{\alpha \in I(n,k)} \in \mathbf{R}^{I(n,k)}.$$

Je-li $k = n$, pak $I(n,k)$ je jednoprvková množina, tedy $\mathbf{R}^{I(n,k)} = \mathbf{R}$ a nová definice jakobiánu dává totéž co původní.

12.7. Cauchyova-Binetova formule. *Jestliže* $A, B \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$, *pak*

$$J_A \cdot J_B = \det([B]^T[A]), \tag{12.6}$$

speciálně

$$\left|J_A\right|^2 = \det([A]^T[A]) \tag{12.7}$$

(Jde vlastně o zobecnění Pythagorovy věty).

Důkaz. Uvažujme $2k$-lineární formy

$$\Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k) = \sum_{\alpha \in I(n,k)} \det(v_{i\alpha_q})_{i,q=1}^k \det(w_{j\alpha_q})_{j,q=1}^k\,, \tag{12.8}$$

$$\Psi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k) = \det\Big(\vec{v}_i \cdot \vec{w}_j\Big)_{i,j=1}^k\,, \tag{12.9}$$

kde píšeme

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^n v_{ij}\vec{e}_j, \quad \vec{w}_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}\vec{e}_j.$$

Za malou chvíli ověříme, že Φ a Ψ dávají stejný výsledek, když $\vec{v}_i$ a $\vec{w}_i$ vybíráme z bázových vektorů, tudíž z multilinearity plyne, že se musí shodovat. Výsledek aplikujeme na vektory $\vec{v}_i = A(\vec{e}_i)$, $\vec{w}_i = B(\vec{e}_i)$, $i = 1, \dots, k$.

Nechť tedy $\vec{v}_i$ a $\vec{w}_i$ jsou některé z bázových vektorů. Pokud $\vec{v}_{i_1} = \vec{v}_{i_2}$, kde $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ jsou různé, potom všechny determinanty $\det(v_{i\alpha_j})_{i,j=1}^k$ jsou nulové, a jelikož

$$\vec{v}_{i_1} \cdot \vec{w}_j = \vec{v}_{i_2} \cdot \vec{w}_j, \qquad j = 1, \dots, n,$$

je i determinant v (12.9) nulový. Můžeme tedy předpokládat, že $\vec{v}_i$ jsou navzájem různé, tedy existuje $\beta \in I(n,k)$ tak, že až na pořadí jsou $\vec{v}_i$ právě $\vec{e}_{\beta_1}, \dots, \vec{e}_{\beta_k}$. Nyní uvažujme případ, že mezi vektory $\vec{w}_j$ není zastoupen vektor $\vec{v}_{i_0}$, $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. Potom Φ dává nulu, neboť

$$\det(w_{i\beta_j})_{i,j=1}^k = 0$$

a pro $\alpha \neq \beta$ je

$$\det(v_{i\alpha_j})_{i,j=1}^k = 0.$$

Ψ dává také nulu, neboť v matici

$$\Big(\vec{v}_i \cdot \vec{w}_j\Big)_{i,j=1}^k$$

je i_0-tý řádek nulový. Zbývá případ, že až na pořadí jsou $\vec{v}_i$ právě $\vec{e}_{\beta_1}, \dots, \vec{e}_{\beta_k}$. Potom na pravé straně (12.8) je nenulový jediný sčítanec, odpovídající multiindexu indexu β. Podle věty o součinu determinantů máme

$$\Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k) = \det\Big(\sum_{q=1}^k v_{i\beta_q} w_{j\beta_q}\Big),$$

ale vzhledem k tomu, že jak $\vec{v}_i$, tak $\vec{w}_j$ vybíráme z $\{\vec{e}_{\beta_1}, \dots, \vec{e}_{\beta_k}\}$, je

$$\sum_{q=1}^k v_{i\beta_q} w_{j\beta_q} = \vec{v}_i \cdot \vec{w}_j, \qquad i, j = 1, \dots, k.$$

Tím jsme ověřili, že $\Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k) = \Psi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$ a důkaz je dokonán. □

12.8. k-rozměrné plochy. $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *parametrizovatelná k-rozměrná plocha*, jestliže existuje otevřená množina $G \subset \mathbf{R}^k$ a difeomorfismus $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ tak, že

$$\varphi(G) = \Omega.$$

Takový difeomorfismus φ se nazývá *parametrizace* plochy Ω.

Množina $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá *k-rozměrná plocha*, jestliže je lokálně parametrizovatelná. Přesněji: ke každému bodu $x \in \Omega$ existuje jeho okolí U v $\mathbf{R}^n$ tak, že $U \cap \Omega$ je parametrizovatelná k-rozměrná plocha. *Podplochou* plochy Ω se rozumí plocha stejné dimenze, která je podmnožinou. Je-li $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ k-rozměrná plocha a $x \in \Omega$, *relativním okolím* bodu x rozumíme jeho okolí vzhledem k Ω, neboli průnik Ω s okolím bodu x vzhledem k $\mathbf{R}^n$. Podobně definujeme relativně otevřenou množinu apod.

Řekneme-li, že $\varphi : G \to \Omega$ je parametrizace, myslíme tím automaticky, že $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená, φ je difeomorfismus, ale $\varphi(G)$ nemusí být celá plocha Ω !

Každou k-rozměrnou plochu lze pokrýt spočetným systémem k-rozměrných parametrizovatelných ploch: Víme totiž, že z libovolného systému otevřených podmnožin $\mathbf{R}^n$ lze vybrat spočetný podsystém, který má stejné sjednocení jako systém původní. Tento poznatek aplikujeme na systém všech otevřených množin $U \subset \mathbf{R}^n$, jejichž průnik s Ω je parametrizovatelná plocha.

12.9. k-rozměrná míra. Našim dalším cílem bude sestrojit míru v $\mathbf{R}^n$, která by se hodila k měření množin na k-rozměrných plochách.

Množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ nazveme S_k-měřitelnou, jestliže $\varphi^{-1}(E)$ je λ_k měřitelná pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbf{R}^k$ a každý difeomorfismus $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$. Systém všech S_k-měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}_k(\mathbf{R}^n)$. Je to zřejmě σ-algebra obsahující všechny borelovské množiny (jelikož $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ je generována poloprostory, stačí ověřit měřitelnost poloprostoru, ale ta je triviální).

Množinu $N \subset \mathbf{R}^n$ nazveme S_k-nulovou, jestliže $\lambda_k(g(N')) = 0$ pro každou množinu $N' \subset N$ a každé lipschitzovské zobrazení $g : N' \to \mathbf{R}^k$. Zřejmě každá S_k-nulová množina je S_k-měřitelná.

Nechť $M \in \mathfrak{M}_k(\mathbf{R}^n)$ nazveme S_k-kontrolovanou, jestliže ji lze pokrýt spočetně mnoha parametrizovatelnými k-rozměrnými plochami až na S_k-nulovou množinu.

Vtip S_k-kontrolovatelných množin spočívá v měřitelnosti jejich lipschitzovských obrazů. Nechť $M \in \mathfrak{M}_k(\mathbf{R}^n)$ je S_k-kontrolovaná množina a $g : M \to \mathbf{R}^k$ je lipschitzovské zobrazení. Jestliže M je S_k-nulová množina, pak $\lambda_k(g(M)) = 0$. Jestliže M je podmnožinou parametrizované plochy $\varphi(G)$, pak $g(M) = g\circ\varphi\,(\varphi^{-1}(M))$ je měřitelná podle lemmatu 12.3. V obecném případě je $g(M)$ spočetné sjednocení množin měřitelných z jednoho či druhého důvodu, tedy opět měřitelná množina.

Na σ-algebře $\mathfrak{M}_k(\mathbf{R}^n)$ definujeme k-rozměrnou míru S_k následujícím způsobem: Pokud $M \in \mathfrak{M}_k(\mathbf{R}^n)$ není S_k-kontrolovaná, položíme $S_k(M) = \infty$. Pokud $M \in \mathfrak{M}_k(\mathbf{R}^n)$ je S_k-kontrolovaná, buď

$$S_k(M) = \sup\Big\{\sum_i \lambda_k(g_i(M_i)) : \ M_i \text{ jsou po dvou disjunktní } S_k\text{-měřitelné podmnožiny } M,$$
$$g_i : M_i \to \mathbf{R}^k,\ \operatorname{lip}(g_i) \le 1\Big\}.$$

Myšlenka k-rozměrné míry je jednoduchá: na malém okolí bodu plochy můžeme přibližně nahradit jeho plošnou míru mírou projekce na tečný prostor (představme si ho intuitivně, přesná definice přijde v příští kapitole). Zobrazení g_i si představíme jako složení této projekce s izometrií zobrazující tečný prostor na $\mathbf{R}^k$. Když místo takového zobrazení použijeme něco příliš odlišného, dostaneme méně přesný dolní součet, který se v supremu neuplatní. Čím jemnější dělení, tím přesněji součet aproximuje plošnou míru.

12.10. k-rozměrná míra je míra. S_k je míra na $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{M}_k(\mathbf{R}^n))$.

Důkaz. Uvažujme posloupnost $\{M_j\}$ po dvou disjunktních $\mathfrak{M}_k(\mathbf{R}^n)$-měřitelných podmnožin $\mathbf{R}^n$ a jejich sjednocení M. Chceme dokázat

$$S_k(M) = \sum_{j=1}^{\infty} S_k(M_j).$$

Můžeme předpokládat, že M, M_j jsou S_k-kontrolované, jinak dostaneme na obou stranách nekonečno. Jsou-li $\sum_i \lambda(g_i(M_j^i))$ dolní součty k $S_k(M_j)$, $j = 1, 2, \dots$, pak

$$\sum_{i,j} \lambda(g_i(M_j^i))$$

je dolní součet k $S_k(M)$. Odtud

$$S_k(M) \ge \sum_{j=1}^{\infty} S_k(M_j). \tag{12.10}$$

Naopak, buď $\sum_{i=1}^m \lambda(g_i(A_i))$ dolní součet k $S_k(M)$. Potom

$$\lambda(g_i(A_i)) \le \sum_j \lambda(g_i(A_i \cap M_j)) \le \sum_j S_k(A_i \cap M_j), \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

a z (12.10) plyne

$$\sum_i S_k(A_i \cap M_j) \le S_k(M_j), \qquad j = 1, 2, \dots.$$

Tedy

$$\sum_i \lambda(g_i(A_i)) \le \sum_i \Big(\sum_j S_k(A_i \cap M_j)\Big) = \sum_j \Big(\sum_i S_k(A_i \cap M_j)\Big)$$
$$\le \sum_j S_k(M_j).$$

Přechodem k supremu přes všechny dolní součty k $S_k(E)$ dostáváme

$$S_k(E) \le \sum_j S_k(M_j). \tag{12.11}$$

Z (12.10) a (12.11) plyne, že S_k je míra. □

12.11. Rozklad lineárního zobrazení. *Nechť* $A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$. *Potom*

$$A = Q \circ D \circ P,$$

kde $Q \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$ *je izometrické zobrazení, matice zobrazení* $D \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k)$ *je diagonální s kladnými diagonálními prvky a* $P \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k)$ *je izometrické zobrazení (tedy s ortogonální maticí).*

Důkaz. Matice $[A]^T[A]$ je symetrická pozitivně definitní, tedy existuje ortonormální báze $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$ prostoru $\mathbf{R}^k$ složená z vlastních vektorů matice $[A]^T[A]$. Tedy

$$[A]^T[A]\vec{u}_i = \lambda_i^2 \vec{u}_i, \qquad \lambda_i \in (0, \infty), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Potom Q, D a P budeme konstruovat jako lineární zobrazení, která zobrazují báze na báze: $P(\vec{u}_i) = \vec{e}_i$, $D(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$, $Q(\lambda_i \vec{e}_i) = A(\vec{u}_i)$. Je třeba ověřit, že Q je izometrie, třeba tak, že $(Q(\vec{e}_1), \ldots, Q(\vec{e}_k))$ je ortonormální báze prostoru $Q(\mathbf{R}^k)$. To je vidět z následujícího výpočtu

$$Q(\vec{e}_i) \cdot Q(\vec{e}_j) = \frac{A(\vec{u}_i)}{\lambda_i} \cdot \frac{A(\vec{u}_j)}{\lambda_j} = \frac{[A]^T[A]u_i}{\lambda_i \lambda_j} \cdot u_j$$
$$= \begin{cases} u_i \cdot u_j = 1, & i = j, \\ \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i \lambda_j}\, u_i \cdot u_j = 0, & i \ne j. \end{cases}$$

□

12.12. Lemma o míře lineárního obrazu. *Nechť* $D : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ *je lineární zobrazení, jehož matice je diagonální s kladnými diagonálními prvky. Potom*

$$\lambda(D(E)) = J_D\, \lambda(E)$$

pro každou měřitelnou $E \subset \mathbf{R}^k$.

Důkaz. Máme

$$D(x) = (d_1 x^1, \ldots, d_k x^k), \qquad x \in \mathbf{R}^k,$$

kde $d_1, \ldots, d_k$ jsou kladná reálná čísla. Pro každý k-rozměrný interval Q je $D(Q)$ také k-rozměrný interval a elementární geometrie dává

$$\ell(D(Q)) = d_1 \ldots d_k\, \ell(Q) = J_D\, \ell(Q).$$

Ve stejném poměru dopadají také horní součty k libovolné množině, tedy pro měřitelné množiny máme

$$\lambda(D(E)) = |J_D|\, \lambda(E).$$

□

12.13. Lemma o míře lipschitzovského obrazu II. *Nechť* $G \subset \mathbf{R}^k$ *je otevřená množina a* $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ *je difeomorfismus. Potom pro každou měřitelnou množinu* $E \subset G$ *platí*

$$(\operatorname{lip} \varphi^{-1})^{-k}\, \lambda_k(E) \le S_k(\varphi(E)) \le (\operatorname{lip} \varphi)^k\, \lambda_k(E).$$

(Výraz nalevo pokládáme za nulu, pokud φ^{-1} *není lipschitzovská).*

Důkaz. Buď $\gamma = (\operatorname{lip}\varphi^{-1})^{-1}$ a

$$g_0(x) = \gamma\varphi^{-1}(x), \qquad x \in \varphi(E).$$

Potom $\operatorname{lip} g_0 \le 1$ a tudíž $g_0(\varphi(E))\,\lambda(E)$ je dolní součet k $S_k(f(E))$ (o jednom sčítanci). Odtud

$$\gamma\,\lambda_k(E) \le S_k(\varphi(E)).$$

Nechť nyní $\sum_i \lambda(g_i(M_i))$ je dolní součet k $S_k(\varphi(E))$. Potom podle lemmatu 12.3 je

$$\sum_i \lambda(g_i(M_i)) \le \sum_i \operatorname{lip}(g_i \circ \varphi)^k \lambda(\varphi^{-1}(M_i)) \le \sum_i (\operatorname{lip}\varphi)^k \lambda(\varphi^{-1}(M_i)) \le (\operatorname{lip}\varphi)^k \lambda(E).$$

Přechodem k supremu přes všechny dolní součty dostaneme

$$S_k(\varphi(E)) \le (\operatorname{lip}\varphi)^k \lambda(E).$$

□

12.14. Lemma o perturbaci izometrie. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení a $t_0 \in G$. Jestliže $\varphi'(t_0)$ je izometrické zobrazení, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje okolí U bodu t_0 tak, že pro všechna $t, t' \in U$ je*

$$(1-\varepsilon)|t'-t| \le |\varphi(t') - \varphi(t)| \le (1+\varepsilon)|t'-t|. \tag{12.12}$$

Důkaz. Najděme kouli U se středem v t_0 a obsaženou v G tak, že pro všechna $t \in U$ je $\|\varphi'(t) - \varphi'(t_0)\| < \varepsilon$. Pak pro t, $t' \in U$ máme

$$\begin{aligned}
|\varphi(t') - \varphi(t) - [\varphi'(t_0)]\,(t'-t)| &= \Big|\int_0^1 \frac{d}{d\xi}\Big(\varphi(t+\xi(t'-t)) - [\varphi'(t_0)]\,(t+\xi(t'-t))\Big)\,d\xi\Big| \\
&= \Big|\int_0^1 [\varphi'(t+\xi(t'-t)) - \varphi'(t_0)]\,(t'-t)\,d\xi\Big| \\
&\le \varepsilon|t'-t| = \varepsilon\,|[\varphi'(t_0)]\,(t'-t)|.
\end{aligned}$$

Odtud snadno plyne (12.12). □

12.15. Míra obrazu množiny I. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ je difeomorfismus. Potom ke každému bodu $t_0 \in G$ a $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U \subset G$ bodu t_0 tak, že pro každou měřitelnou množinu $E \subset U$ je*

$$(1-\varepsilon)^{k+1} \int_E |J_\varphi(t)|\,dx \le S_k(\varphi(E)) \le (1+\varepsilon)^{k+1} \int_E |J_\varphi(t)|\,dt. \tag{12.13}$$

Důkaz. Podle lemmatu 12.11 existuje rozklad

$$\varphi'(t_0) = Q \circ D \circ P,$$

kde $Q \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$ je izometrické zobrazení, matice zobrazení $D \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k)$ je diagonální s kladnými diagonálními prvky a $P \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k)$ je izometrické zobrazení. Potom φ můžeme napsat ve tvaru

$$\varphi = \psi \circ D \circ P, \quad \text{kde } \psi = \varphi \circ (\varphi'(t_0))^{-1} \circ Q.$$

Podle věty o součinu determinantů máme pro každé $\alpha \in I(n,k)$

$$J^\alpha_\varphi(t_0) = J^\alpha_Q J_D J_P.$$

Dále, $[Q]^T[Q]$ je jednotková matice a proto z Cauchy-Binetovy formule dostáváme $|J_Q| = 1$, podobně $|J_P| = 1$. Tedy

$$|J_\varphi(t_0)| = |J_Q|\,|J_D|\,|J_P| = J_D. \tag{12.14}$$

Buď $s_0 = D(P(t_0))$. Potom $\psi'(s_0) = Q$, tj. izometrie, takže podle lemmatu 12.14 existuje okolí V bodu s_0 tak, že pro všechna $s, s' \in V$ je

$$(1-\varepsilon)|s'-s| \le |\varphi(s') - \varphi(s)| \le (1+\varepsilon)|s'-s|.$$

Podle lemmatu 12.13 je potom

$$(1-\varepsilon)^k \lambda(F) \le S_k(\psi(F)) \le (1+\varepsilon)^k \lambda(F) \tag{12.15}$$

pro každou měřitelnou množinu $F \subset V$. S využitím spojitosti jakobiánu najdeme okolí U bodu t_0 tak, že $D \circ P\,(U) \subset V$ a

$$(1+\varepsilon)^{-1}|J_f(t_0)| \le J_f(t) \le (1-\varepsilon)^{-1} J_f(t_0), \qquad \forall t \in U. \tag{12.16}$$

Pro každou měřitelnou množinu $E \subset U$ a $F = D \circ P\,(E)$ máme podle lemmatu 12.12 a odhadů (12.15), (12.14) a (12.16)

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi(E)) &= \lambda(\psi(F) \le (1+\varepsilon)^k \lambda(F) = (1+\varepsilon)^k |J_D| \lambda(P(E)) \\ &= (1+\varepsilon)^k J_\varphi(t_0)\lambda(E) = \int_E J_f(t_0)\,dt \\ &\le (1+\varepsilon)^{k+1} \int_E J_f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Obdobně ověříme druhou z dokazovaných nerovností. □

12.16. Míra obrazu množiny II. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ je difeomorfismus. Potom každou měřitelnou množinu $H \subset G$ je*

$$S_k(\varphi(H)) = \int_H |J_\varphi t)|\,dt.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in (0,1)$. Množinu G pokryjeme posloupností B_j takových koulí, že pro každé $j = 1,2,\dots$ a každou měřitelnou $E \subset B_j$ platí (12.13). Použijeme trik zdisjunktnění 1.13 a dostaneme z množin $H \cap B_j$ posloupnost $\{E_j\}$ po dvou disjunktních měřitelných množin tak, že

$$H = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

a

$$(1-\varepsilon)^{k+1} \int_{E_j} |J_\varphi(t)|\,dt \le \lambda(\varphi(E_j)) \le (1+\varepsilon)^{k+1} \int_{E_j} |J_\varphi(t)|\,dt.$$

Sečtením přes j dostaneme

$$(1-\varepsilon)^{k+1} \int_H |J_\varphi(t)|\,dt \le \lambda(\varphi(H)) \le (1+\varepsilon)^{k+1} \int_H |J_\varphi(t)|\,dt.$$

Limitní přechod pro $\varepsilon \to 0$ dává tvrzení. □

12.17. Věta o substituci. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbf{R}^n$ je difeomorfismus. Nechť u je měřitelná funkce na $\varphi(G)$. Potom*

$$\int_{f(G)} u(x)\,dx = \int_G u(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Uvažujme na σ-algebře všech měřitelných podmnožin G míry

$$\mu : E \mapsto \int_E |J_\varphi(t)|\,dt, \qquad \nu : E \mapsto S_k(\varphi(E)).$$

Podle lemmatu 12.16 se tyto míry rovnají, tedy se rovnají i integrály podle těchto měr, což je v podstatě tvrzení věty. □

12.18. Důkaz "obyčejné" věty o substituci. Věta o substituci 11.3 je speciálním případem věty 12.17 pro $k = n$, uvážíme-li, že (v důsledku lemmatu 12.3) triviálně platí $S_n = \lambda_n$.

12.19. Poznámka o Hausdorffově míře. Způsob, kterým definujeme k-rozměrnou míru není jediný ani nejběžnější. Obecně se za k-rozměrné míry považují (velmi zhruba řečeno) míry, které na podmnožinách k-rozměrných ploch dávají to, co od nich čekáme. Na množinách, které se nevejdou do k-rozměrných ploch, mohou různé k-rozměrné míry vést k různým výsledkům.

Nejznámější k-rozměrnou mírou je tzv. Hausdorffova míra, viz. např. [LM], [DIPP]. Hausdorffova míra má smysl i pro necelé hodnoty k, což má význam pro určování dimenze fraktálů apod. Nevýhodou Hausdorffovy míry je, že při jejím poctivém zavádění je nutno provést několik výrazně netriviálních kroků.

Kdybychom chtěli používat Hausdorffovu míru H_k namísto S_k, a dokázat pro ni např. analogii věty o substituci 12.17, stačilo by ověřit, že každá borelovská množina je H_k-měřitelná a že platí analogie lemmatu 12.13 pro H_k.

13.1. Tečný prostor k ploše. Nechť Ω je k-rozměrná plocha a $x \in \Omega$. *Tečný prostor* k Ω v bodě x je prostor $\varphi'(t)(\mathbf{R}^k)$, kde $\varphi : G \to \Omega$ je parametrizace relativního okolí bodu x na Ω s $t = \varphi^{-1}(x)$ (snadno nahlédneme, že na volbě φ tečný prostor nezávisí). Značíme jej $T_x(\Omega)$. Bázi tečného prostoru k Ω v bodě x tedy tvoří vektory

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(t).$$

13.2. Orientace lineárního prostoru. Jsou-li $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ lineární prostory, značíme $\mathrm{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ množinu všech lineárních zobrazení (homomorfismů) prostoru $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$ a $\mathrm{GL}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ množinu všech izomorfismů z $\mathrm{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

Nechť $\mathbf{V}$ je lineární prostor dimenze k. Je-li $k > 0$, řekneme, že $A, B \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$ jsou *souhlasně orientované*, jestliže $J_{B^{-1}A} > 0$; jinak řekneme, že jsou *opačně orientované*. Pokud $k = 0$, pak $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$ obsahuje pouze jeden izomorfismus $\mathbf{0}$, a to nulovému prvku prostoru $\mathbf{R}^k$ přiřazující nulový prvek prostoru $\mathbf{V}$. Definujeme, že izomorfismus $\mathbf{0}$ je souhlasně orientován sám se sebou. Rozklad

$$\mathrm{GL}(\mathbf{R}^k, \mathbf{V}) = \mathrm{GL}^+(\mathbf{R}^k, \mathbf{V}) \cup \mathrm{GL}^-(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$$

množiny $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$ na dvě disjunktní třídy nazveme *orientací* prostoru $\mathbf{V}$, jestliže platí, že A, $B \in \mathrm{GL}^+(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$ jsou vždy souhlasně orientované, a stejně tak A, $B \in \mathrm{GL}^-(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$.

Orientace není určená prostorem $\mathbf{V}$, nýbrž je to dodatečná struktura na $\mathbf{V}$. Orientovat lineární prostor znamená vždy volbu ze dvou možností: Zvolíme $B \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$ a rozhodneme se, zda bude patřit do $\mathrm{GL}^+(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$ nebo do $\mathrm{GL}^-(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$. Vybranou třídu doplníme o všechny izomorfismy z $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$ orientované souhlasně s B a druhá třída bude doplněk do $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$. Další orientaci získáme tak, že zaměníme role $\mathrm{GL}^+(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$ a $\mathrm{GL}^-(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$. Žádná jiná orientace už není. I v případě $k = 0$ máme dvě možnosti pro orientaci, a sice $\mathrm{GL}^+(\mathbf{R}^0, \mathbf{V}) = \{\mathbf{0}\}$, $\mathrm{GL}^-(\mathbf{R}^0, \mathbf{V}) = \emptyset$ (tzv. kladná orientace) nebo obráceně (tzv. záporná orientace).

Ekvivalentní způsob orientace prostoru je rozlišování kladných a záporných bází. Je-li $A \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$, pak $(A(\vec{e}_1), \dots, A(\vec{e}_k))$ je báze prostoru $\mathbf{V}$ a toto přiřazení je vzájemně jednoznačné. Báze $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ orientovaného vektorového prostoru se tedy nazve kladnou, když existuje $A \in \mathrm{GL}^+(\mathbf{R}^k, \mathbf{V})$ tak, že $\vec{x}_i = A(\vec{e}_i)$, $i = 1, \dots, k$.

13.3. Orientace k-rozměrné plochy. Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je k-rozměrná plocha. Řekneme, že Ω je *orientovaná*, jestliže v každém bodě $x \in \Omega$ je orientován tečný prostor $T_x(\Omega)$, a to tak, že pro každou parametrizaci $\varphi : G \to \Omega$ je množina

$$\{t \in G : \ \varphi'(t) \in \mathrm{GL}^+(\mathbf{R}^k, T_{\varphi(t)}(\Omega))\} \tag{13.1}$$

otevřená. Pokud pro parametrizaci φ je množina z (13.1) celé G, řekneme, že φ je *kladná*. Analogicky definujeme *zápornou* parametrizaci.

13.4. Orientovaný integrál. Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je orientovaná k-rozměrná plocha a $\alpha \in \{1, \dots, n\}^k$ je multiindex. Potom existuje právě jedna spojitá funkce dS_k^α / dS_k tak, že

$$\frac{dS_k^\alpha}{dS_k}(\varphi(t)) = \frac{J_\varphi^\alpha(t)}{|J_\varphi(t)|}, \quad t \in G \tag{13.2}$$

pro každou kladnou parametrizaci $\varphi : G \to \Omega$. Důkaz nezávislosti na parametrizaci je snadné (a nudné) cvičení. Používáme také značení

$$\frac{dx_{\alpha_1} \, \dots \, dx_{\alpha_k}}{dS_k} = \frac{dS_k^\alpha}{dS_k}$$

Orientovaný integrál je integrál tvaru

$$\int_\Omega f \, dx_\alpha \, \dots \, dx_{\alpha_k} := \int_{\Omega)} f(x) \, \frac{dS_k^\alpha}{dS_k}(x) \, dS_k(x),$$

kde f je taková funkce, aby výraz na pravé straně měl smysl.

Orientovaný integrál změní znaménko při změně orientace plochy, a nejen to: zaměníme-li tranzpozicí pořadí "diferenciálů" $dx_{\alpha_1}, \dots, dx_{\alpha_k}$, také změníme znaménko integrálu.

Je-li Ω nulrozměrná orientovaná plocha a α prázdný multiindex, definujeme

$$\int_\Omega f = \sum_{x \in \Omega^+} f(x) - \sum_{x \in \Omega^-} f(x),$$

kde Ω^+, resp. Ω^- je množina bodů $x \in \Omega$, kde tečný prostor je orientován kladně, resp. záporně.

13.5. Věta o substituci pro orientovaný integrál. *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je orientovaná k-rozměrná plocha, $\alpha \in \{1, \dots, n\}^k$ a $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ je S_k-měřitelná funkce. Nechť $\varphi : G \to \Omega$ je kladná parametrizace. Potom*

$$\int_{\varphi(G)} f \, dx_\alpha \, \dots \, dx_{\alpha_k} = \int_G f(\varphi(t)) \; \det(\nabla \varphi_{\alpha_k}(t), \dots, \nabla \varphi_{\alpha_k}(t)) \, dt = \int_G f(\varphi(t)) \, J_\varphi^\alpha(t) \, dt,$$

pokud některý z integrálů konverguje.

Důkaz. Důkaz je zřejmý z (13.2). □

13.6. Lemma o derivování jakobiánů. *Nechť $U \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $g = (g_1, \dots, g_{k-1}) : U \to \mathbf{R}^{k-1}$ je dvakrát spojitě diferencovatelné zobrazení. Potom*

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \det\bigl(\vec{e}_i, \nabla g_2(x), \dots, \nabla g_k(x)\bigr) = 0. \tag{13.3}$$

Důkaz. S využitím záměny parciálních derivací máme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \det\bigl(\vec{e}_i, \nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{k-1}(x)\bigr) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \Bigl(\frac{\partial g_1}{\partial x_j} \det\bigl(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \nabla g_2, \dots, \nabla g_{k-1}(x)\bigr)\Bigr) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_i \partial x_j} \det\bigl(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \nabla g_2, \dots, \nabla g_{k-1}(x)\bigr)\Bigr) \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_1}{\partial x_j} \Bigl(\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \det\bigl(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \nabla g_2, \dots, \nabla g_{k-1}(x)\bigr)\Bigr). \end{aligned} \tag{13.4}$$

Výraz na předposledním řádku výpočtu (13.4) vymizí, neboť

$$\det(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \dots) = -\det(\vec{e}_j, \vec{e}_i, \dots), \qquad \det(\vec{e}_i, \vec{e}_i, \dots) = 0.$$

Na posledním řádku (13.4) zjistíme, že k dokončení důkazu potřebujeme opět (13.3), ale stačí nám ve speciálním případě, kdy $g_1(x) = x_j$, takže $\nabla g_1(x) = \vec{e}_j$. Rekurentním opakováním postupu se dopracujeme k postačitelnosti ověření (13.3) v případě, že všechny g_j jsou lineární polynomy. V tom případě všechny ∇g_j jsou konstantní vektory, determinant, který derivujeme je také konstantní a derivace konstanty je nulová. □

13.7. Plocha s krajem. Pojem *k-rozměrná orientovaná plocha s krajem* budeme používat pro dvojici (Ω, Γ), kde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je k-rozměrná orientovaná plocha, $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ je $(k-1)$-rozměrná orientovaná plocha a Ω a Γ jsou navzájem svázány následujícím způsobem: Ke každému bodu $x \in \Omega \cup \Gamma$ existuje okolí U bodu x v $\mathbf{R}^n$, otevřená množina $G \subset \mathbf{R}^k$ a difeomorfismus $\varphi : G \to U$ tak, že označíme-li

$$\begin{aligned} \varphi^\Omega(t) &:= \varphi(t), \qquad t \in G^\Omega := \{t \in G, \ t_1 < 0\}, \\ \varphi^\Gamma(s) &:= \varphi(0, s_1, \dots, s_{k-1}), \qquad s \in G^\Gamma := \{s \in \mathbf{R}^{k-1} : \ (0, s_1, \dots, s_{k-1}) \in G\}, \end{aligned}$$

pak φ^Ω je parametrizace $\Omega \cap U$, φ^Γ je parametrizace $\Gamma \cap U$ a buď jsou φ^Ω i φ^Γ kladné, nebo jsou obě záporné. Požadujeme

$$\varphi^\Omega(G^\Omega) = \Omega \cap U, \qquad \varphi^\Gamma(G^\Gamma) = \Gamma \cap U.$$

Při parametrizaci bodu $x \in \Omega$ se ovšem může stát, že $G^\Gamma = \emptyset$.

Poznamenejme, že používá-li se v literatuře pojem "plocha s krajem" pro jednu množinu, myslí se tím obvykle $\Omega \cup \Gamma$.

13.8. Obecná Stokesova věta. *Nechť (Ω, Γ) je k-rozměrná orientovaná plocha s krajem. Nechť $\overline{\Omega} \setminus (\Omega \cup \Gamma)$ má S_{k-1}-míru nula* ($\overline{\Omega}$ je uzávěr vzhledem k $\mathbf{R}^n$). *Nechť Ω je omezená. Nechť $W \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina obsahující Ω. Potom pro každý multiindex $\beta \in I(n, k-1)$ a každou spojitou funkci $f : \overline{W} \to \mathbf{R}$ spojitě diferencovatelnou uvnitř W platí*

$$\int_\Gamma f \, dx_{\beta_1}, \dots \, dx_{\beta_{k-1}} = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \, dx_i \, dx_{\beta_1}, \dots \, dx_{\beta_{k-1}}, \tag{13.5}$$

pokud integrály na obou stranách konvergují.

Důkaz. 1. KROK: Ke každému bodu $\bar{x} \in \Omega \cup \Gamma$ chceme najít okolí $U_{\bar{x}}$ bodu $\bar{x}$ v $\mathbf{R}^n$ tak, že (13.5) platí pro f s nosičem v $U_{\bar{x}}$. Uvažujme difeomorfismus φ, určující okolí $U_{\bar{x}}$ a parametrizace $\varphi^\Omega : G^\Omega \to \Omega \cap U_{\bar{x}}$ a $\varphi^\Gamma : G^\Gamma \to \Gamma \cap U_{\bar{x}}$ jako v definici plochy s krajem. Můžeme předpokládat, že množiny $U_{\bar{x}}$, G jsou omezené. Najdeme $a > 0$ tak, že

$$\overline{G} \subset (-a, a) \times \cdots \times (-a, a) \tag{13.6}$$

Pro každé $b \in \mathbf{R}$ budeme značit

$$L_b = \{t \in \mathbf{R}^k : \; t_1 < -b\}.$$

Nechť funkce f má nosič v $U_{\bar{x}}$. Najděme otevřenou množinu $V \subset U_{\bar{x}}$ tak, že

$$\operatorname{spt} f \subset V \quad \text{a} \quad \overline{V} \subset U_{\bar{x}},$$

a otevřenou množinu $H \subset G$ tak, že

$$\varphi^{-1}(\overline{V}) \subset H \quad \text{a} \quad \overline{H} \subset G.$$

Zaveďme H^Ω a H^Γ analogicky jako G^Ω a G^Γ. Podle věty 19.5 existují $\varphi^\delta : H \to \mathbf{R}^n$, kde $0 < \delta < \delta_0$ je horní index, tak, že pro $\delta \to 0$ máme

$$\varphi^\delta \rightrightarrows \varphi, \qquad \nabla\varphi^\delta \rightrightarrows \nabla\varphi \qquad \text{na } H. \tag{13.7}$$

Zvolme $b > c > 0$ tak, že $[-b, 0] \times H^\Gamma \subset G$. Z kompaktnosti nosiče funkce f a množiny $\varphi(\overline{H \cap L_c})$ odvodíme, že existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $x \in \operatorname{spt} f$ je $B(x, \varepsilon) \subset V$ a pro všechna $x \in \varphi(\overline{H \cap L_c})$ je $B(x, \varepsilon) \subset W$. Ze stejnoměrné konvergence

$$\varphi^\delta \to \varphi$$

plyne, že existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro $0 < \delta < \delta_1$ a $t \in H$ je

$$|\varphi^\delta(t) - \varphi(t)| < \varepsilon. \tag{13.8}$$

Pro $0 < \delta < \delta_1$ definujme funkce $h_j^\delta : L_c \to \mathbf{R}$ předpisem

$$h_j^\delta(t) = \begin{cases} f(\varphi^\delta(t)) \det(\vec{e}_j, \nabla\varphi^\delta_{\beta_1}(t), \dots, \nabla\varphi^\delta_{\beta_{k-1}}(t), & t \in H, \\ 0, & t \notin H. \end{cases}$$

Nechť $0 < \delta < \delta_1$. Z (13.8) a definice ε odvodíme, že pro $t \in H \cap L_c$ je $\varphi^\delta(t) \in W$. Podobně pro $t \in L_c \cap H \setminus \varphi^{-1}(\overline{V})$ je $\varphi^\delta(t) \notin \operatorname{spt} f$ a tudíž $h_j^\delta(t) = 0$. Dostáváme, že h_j^δ jsou spojitě diferencovatelné jak na $L_c \cap H$, tak na $L_c \setminus \varphi^{-1}(\overline{V})$, tudíž i na sjednocení těchto dvou otevřených množin, což je L_c. S pomocí Fubiniovy věty a (13.6) máme

$$\begin{aligned}
\int_{L_b} \frac{\partial h_1^\delta}{\partial t_1}(t)\, dt &= \int_{(-a,a)^{k-1}} \Big(\int_{-a}^{-b} \frac{\partial h_1^\delta}{\partial t_1}(t_1, t_2, \dots, t_k)\, dt_1 \Big)\, dt_2 \, \dots \, dt_k \\
&= \int_{(-a,a)^{k-1}} \Big(h_1^\delta(-b, t_2, \dots, t_k) - h_1^\delta(-a, t_2, \dots, t_k) \Big)\, dt_2 \, \dots \, dt_k \\
&= \int_{\mathbf{R}^{k-1}} h_1^\delta(-b, s_1, \dots, s_{k-1})\, ds.
\end{aligned}$$

Podobně, integrujeme-li nejprve podle j-té proměnné a pak podle ostatních, dostaneme

$$\int_{L_b} \frac{\partial h_j^\delta}{\partial t_j}(t)\, dt = 0, \qquad j = 2, \dots, k,$$

tedy

$$\int_{L_b} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial h_j^\delta}{\partial t_j}(t)\, dt = \int_{\mathbf{R}^{k-1}} h_1^\delta(-b, s_1, \dots, s_{k-1})\, ds. \tag{13.9}$$

Z lemmatu 13.6 snadno odvodíme, že

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial h_j^\delta}{\partial t_j}(t) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi^\delta(t))\ \det(\frac{\partial \varphi_i^\delta}{\partial t_j}\vec{e}_j, \nabla\varphi^\delta_{\beta_1}(t), \dots, \nabla\varphi^\delta_{\beta_{k-1}}(t))$$
$$+ f(\varphi^\delta(t)) \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial t_j} \det(\vec{e}_j, \nabla\varphi^\delta_{\beta_1}(t), \dots, \nabla\varphi^\delta_{\beta_{k-1}}(t))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi^\delta(t)) \det(\nabla\varphi_i^\delta, \nabla\varphi^\delta_{\beta_1}(t), \dots, \nabla\varphi_{\beta_{k-1}}(t)).$$

S pomocí (13.9) dostáváme

$$\begin{aligned}
&\int_{H\cap L_b} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi^\delta(t)) \det(\nabla\varphi_i^\delta, \nabla\varphi^\delta_{\beta_1}(t), \dots, \nabla\varphi_{\beta_{k-1}}(t)) \\
&\qquad = \int_{L_b} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial h_j^\delta}{\partial t_j}(t)\, dt \\
&\qquad = \int_{\mathbf{R}^{k-1}} h_1^\delta(-b, s_1, \dots, s_{k-1})\, ds \\
&\qquad = \int_{H^\Gamma} \Big(f\circ\varphi^\delta\ \det(\vec{e}_1, \nabla\varphi^\delta_{\beta_1}, \dots, \nabla\varphi^\delta_{\beta_{k-1}})\Big)(0, s_1, \dots, s_{k-1})\, ds.
\end{aligned} \tag{13.10}$$

Stejnoměrná konvergence 13.7 stačí pro záměnu limity a integrálu v (13.10). Dostáváme

$$\begin{aligned}
&\int_{H\cap L_b} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \det(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_{\beta_1}(t), \dots, \nabla\varphi_{\beta_{k-1}}(t)) \\
&\qquad = \int_{H^\Gamma} \Big(f\circ\varphi\ \det(\vec{e}_1, \nabla\varphi_{\beta_1}, \dots, \nabla\varphi_{\beta_{k-1}})\Big)(-b, s_1, \dots, s_{k-1})\, ds.
\end{aligned}$$

Rutinní limitní přechod pro $b \to 0$ (zde využíváme konvergenci integrálu na pravé straně (13.5), která se promítá do konvergence integrálu přes H_Ω v následující formuli, detaily proveďte samostatně) dává

$$\begin{aligned}
&\int_{H^\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \det(\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_{\beta_1}(t), \dots, \nabla\varphi_{\beta_{k-1}}(t)) \\
&\qquad = \int_{H^\Gamma} \Big(f\circ\varphi\ \det(\vec{e}_1, \nabla\varphi_{\beta_1}, \dots, \nabla\varphi_{\beta_{k-1}})\Big)(0, s_1, \dots, s_{k-1})\, ds \\
&\qquad = \int_{H^\Gamma} f(\varphi^\Gamma(s))\ \det(\nabla\varphi^\Gamma_{\beta_1}(s), \dots, \nabla\varphi^\Gamma_{\beta_{k-1}}(s))\, ds.
\end{aligned}$$

Odtud podle věty o substituci dostáváme rovnou (13.5).

2. KROK: Nyní budeme dokazovat (13.5) za dodatečného předpokladu

$$\operatorname{spt} f \cap N = \emptyset, \qquad \text{kde } N = \overline{\Omega} \setminus (\Omega \cup \Gamma) \tag{13.11}$$

Podle prvého kroku ke každému bodu $\bar{x}$ nosiče funkce f najdeme okolí $U_{\bar{x}}$ tak, že (13.5) platí pro funkce s nosičem v $U_{\bar{x}}$. Nyní použijeme větu o rozkladu jednotky 19.8 k nalezení nezáporných spojitě diferencovatelných funkcí ω_q, $q = 1, \dots, m$, tak, že $\sum_q \omega_q = 1$ na $\operatorname{spt} f$ a každá z funkcí ω_q má nosič v některé $U_{\bar{x}}$. Jelikož (13.5) platí pro každou z funkcí $f\omega_q$, $q = 1, \dots, m$, platí i pro jejich součet, což je funkce f. Tím jsme dokázali (13.5) za předpokladu (13.11).

3. KROK Nyní odstraníme předpoklad (13.11) a dokážeme Stokesovu větu již v plné obecnosti. Uvažujme lineární zobrazení $\Pi_\beta : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{k-1}$,

$$\Pi_\beta(x_1, \dots, x_n) = (x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_{k-1}}).$$

Označme

$$\begin{aligned} Z &= \Pi_\beta^{-1}(\Pi_\beta(N), \\ A &= \mathbf{R}^{k-1} \setminus \Pi_\beta(N), \\ E &= \Big\{x \in \Gamma : \ \frac{dS_k^\beta}{dS_k} = 0\Big\}, \\ E_i &= \Big\{x \in \Omega : \ \frac{dx_i\, dx_{\beta_1}\, \dots\, dx_{\beta_{k-1}}}{dS_k} = 0\Big\}, \qquad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Jelikož Γ je relativně otevřená v $\overline{\Omega} \setminus \Omega$, je množina N uzavřená tamtéž a z omezenosti Ω plyne, že N je kompaktní. Odtud dostáváme, že $\Pi_\beta(N)$ je kompaktní podmnožina $\mathbf{R}^{k-1}$, a jelikož N je S_{k-1}-nulová, je

$$\lambda_{k-1}(\Pi_\beta(N)) = 0.$$

Najděme posloupnost $\{K_j\}$ kompaktních podmnožin $\mathbf{R}^{n-1}$ tak, že

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = A \cap \Pi_\beta(\overline{\Omega})$$

(např. $K_j = \{t \in \Pi_\beta(\overline{\Omega}) : \operatorname{dist}(t, \partial A) \geq 1/j\}$. Podle důsledku 19.9 existuje ke každému $j = 1, 2, \dots$ spojitě diferencovatelná funkce $\eta_j : \mathbf{R}^{n-1} \to [0, 1]$ tak, že $\operatorname{spt} \eta_j \subset A$ a $\eta_j = 1$ na K_j. Funkce $(\eta_j \circ \Pi_\beta) f$ splňují (13.11). Podle předchozí části důkazu je

$$\int_\Gamma (\eta_j \circ \Pi_\beta) f\, dx_{\beta_1}\, \dots\, dx_{\beta_{k-1}} = \int_\Omega (\eta_j \circ \Pi_\beta) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i\, dx_{\beta_1}\, \dots\, dx_{\beta_{k-1}}, \tag{13.12}$$

neboť pro každé $i = 1, \dots, n$ je

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_j \circ \Pi_\beta) = 0 \quad \text{nebo} \quad \frac{dx_i\, dx_{\beta_1}\, \dots\, dx_{\beta_{k-1}}}{dS_k} = 0.$$

Máme

$$(\eta_j \circ \Pi_\beta) f\, \frac{dS_k^\beta}{dS_k} \to f\, \frac{dS_k^\beta}{dS_k} \quad \text{na } \Gamma \setminus (Z \setminus E), \tag{13.13}$$

a

$$(\eta_j \circ \Pi_\beta) \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \frac{dx_i\, dx_{\beta_1}\, \dots\, dx_{\beta_{k-1}}}{dS_k} \to \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \frac{dx_i\, dx_{\beta_1}\, \dots\, dx_{\beta_{k-1}}}{dS_k} \quad \text{na } \Omega \setminus \Big(Z \setminus \bigcap_{i=1}^{n} E_i\Big) \tag{13.14}$$

Předpokládejme, že je nám známo

$$S_{k-1}(\Gamma \cap (Z \setminus E)) = 0, \tag{13.15}$$

a

$$S_k\Big(\Omega \cap (Z \setminus \bigcap_{i=1}^{n} E_i)\Big) = 0. \tag{13.16}$$

Potom konvergence (13.13) nastává S_{k-1}-skoro všude na Γ a konvergence (13.14) nastává S_k-skoro všude na Ω. Jelikož integrály na obou stranách (13.5) konvergují, absolutní hodnoty integrandů se dají použít jako majoranty, můžeme v (13.12) udělat limitní přechod podle Lebesgueovy věty, a tím dostaneme (13.5). Tím by byl důkaz dokončen, zbývá nám dokázat (13.15) a (13.16).

4. KROK: Dokážeme (13.15). Nechť $x \in \Gamma \setminus E$. Buď $H \subset \mathbf{R}^{k-1}$ otevřená množina a $\psi : H \to \Gamma$ parametrizace, $x = \psi(s) \in \psi(H)$. Pomocí věty o lokálním difeomorfismu najdeme okolí H' bodu s tak, že $\Pi_\beta \circ \psi \lfloor H'$ je invertibilní, tedy existuje k ní inverzní $h : H'' \to H'$. Položme $\tilde{\psi} = \psi \circ h$. Potom ψ je parametrizace a existuje okolí V bodu x tak, že $V \cap \Gamma \subset \tilde{\psi}(H'')$. Jelikož $\lambda_{k-1}(\Pi_\beta(N)) = 0$, podle věty 12.13 je

$$S_{k-1}(V \cap \Gamma \cap Z) = S_{k-1}(\tilde{\psi}(H'' \cap \Pi_\beta(N))) = 0.$$

Ke každému bodu $x \in \Gamma \setminus E$ tedy existuje okolí V tak, že $S_{k-1}(V \cap \Gamma \cap Z) = 0$. Jelikož z těchto okolí můžeme vybrat spočetné podpokrytí množiny $\Gamma \setminus E$, je

$$S_{k-1}((\Gamma \setminus E) \cap Z) = 0.$$

5. KROK: Dokážeme (13.16). Důkaz se liší od předchozího kroku jen v detailech. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ pevné. Nechť $x \in \Omega \setminus E_i$. Buď $\varphi : G \to \Omega$ parametrizace, $x = \varphi(t) \in \varphi(G)$. Uvažujme zobrazení

$$\Pi_{i,\beta} : x \mapsto (x_i, x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_{k-1}}) : \quad \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k.$$

Pomocí věty o lokálním difeomorfismu najdeme okolí G' bodu t tak, že $\Pi_{i,\beta} \circ \varphi \lfloor G'$ je invertibilní, tedy existuje k ní inverzní $g : G'' \to G'$. Položme $\tilde{\varphi} = \varphi \circ g$. Potom φ je parametrizace a existuje okolí U bodu x tak, že $U \cap \Omega \subset \tilde{\varphi}(G'')$. Jelikož $\lambda_{k-1}(\Pi_\beta(N)) = 0$, je

$$\lambda_k(\mathbf{R} \times \Pi_{i,\beta}(N)) = 0.$$

Tedy podle věty 12.13 je

$$S_k(U \cap \Omega \cap Z) = S_k(\tilde{\varphi}(G'' \cap (\mathbf{R} \times \Pi_{i,\beta}(N)))) = 0.$$

Ke každému bodu $x \in \Omega \setminus E_i$ tedy existuje okolí U tak, že $S_k(U \cap \Omega \cap Z) = 0$. Jelikož z těchto okolí můžeme vybrat spočetné podpokrytí množiny $\Omega \setminus E_i$, je

$$S_k((\Omega \setminus E_i) \cap Z) = 0.$$

Tím je důkaz ukončen. □

13.9. Křivkový integrál druhého druhu. Nechť Ω je jednorozměrná orientovaná plocha. Potom jednotkové tečné pole $\vec{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ na Ω (někdy značíme též $\vec{\tau}_\Omega$) je dáno vzorcem

$$\tau_i = \frac{dx_i}{ds},$$

kde $ds := dS_1$.

Pro každou kladnou parametrizaci $\varphi : (a, b) \to \Omega$ platí

$$\vec{\tau}(\varphi(t)) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}, \qquad t \in (a, b).$$

Je-li $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbf{R}^n$ vektorové pole na Ω, definujeme jeho *křivkový integrál druhého druhu* jako

$$\int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{\tau}\, ds = \int_\Omega f_1\, dx_1 + \dots + f_n\, dx_n.$$

Pro úplnost dodejme, že *křivkový integrál prvého druhu* je název používaný pro integrál skalárního pole podle jednorozměrné míry (např. podle S_1).

13.10. Vektorový součin. Nechť $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$,

$$\vec{u}_i = \sum_{j=1}^n u_{ij} \vec{e}_j.$$

Definujme *vektorový součin* vektorů $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}$ předpisem

$$\vec{u}_1 \times \dots \times \vec{u}_{n-1} := (-1)^{n-1} \det(\vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n) \vec{e}_1 + (-1)^{n-2} \det(\vec{w}_1, w_3, \dots, \vec{w}_n)\, e_2 + \dots + \det(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-1})\, e_n,$$

kde

$$\vec{w}_j = \sum_{i=1}^{n-1} u_{ij} \vec{e}_i.$$

Vektorový součin lze charakterizovat vzorcem

$$(\vec{u}_1 \times \dots \times \vec{u}_{n-1}) \cdot \vec{y} = \det(\vec{y}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}) \quad \forall \vec{y} \in \mathbf{R}^n. \tag{13.17}$$

Odtud je zřejmé, že vektorový součin je kolmý na všechny své činitele.

13.11. Plošný integrál druhého druhu. Nechť Ω je $(n-1)$-rozměrná orientovaná plocha. Potom jednotkové *normálové pole* $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ na Ω (někdy značíme též $\vec{\nu}_\Omega$) je dáno vzorcem

$$\nu_1 = (-1)^{n-1} \frac{dx_2\, \dots\, dx_n}{dS},\ \nu_2 = (-1)^{n-2} \frac{dx_1\, dx_3\, \dots\, dx_n}{dS},\ \dots,\ \nu_n = \frac{dx_1\, \dots\, dx_{n-1}}{dS},$$

kde $dS := dS_{n-1}$. Pro každou kladnou parametrizaci $\varphi : G \to \Omega$ platí

$$\vec{\nu}(\varphi(t)) = \frac{*J_\varphi(t)}{|J_\varphi(t)|}, \qquad t \in G,$$

kde

$$*J_\varphi(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}$$

(ověřte samostatně). Odtud je zřejmé, že $\vec{\nu}(x)$ je jednotkový vektor kolmý na $T_x(\Omega)$.

Je-li $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbf{R}^n$ vektorové pole na Ω, definujeme jeho *plošný integrál druhého druhu* jako

$$\int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, dS,$$

kde $dS = dS_{n-1}$. Pro $n = 3$ máme

$$\int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, dS = \int_\Omega f_1\, dx_2\, dx_3 + f_2\, dx_3\, dx_1 + f_3\, dx_1\, dx_2,$$

pro $n = 2$ je

$$\int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, dS = \int_\Omega f_2\, dx_1 - f_1\, dx_2.$$

Pro úplnost dodejme, že *plošný integrál prvého druhu* je název používaný pro integrál skalárního pole podle $(n-1)$-rozměrné nebo obecněji k-rozměrné míry (např. podle S_k).

13.12. Poznámky k orientaci. Nechť (Ω, Γ) je k-rozměrná orientovaná plocha s krajem. Následující poznámky jsou psány místy intuitivním jazykem. Postřehy založené na formulacích v uvozovkách mohou sloužit pouze k vytvoření hypotézy, kterou je pak třeba ověřit rigorózním způsobem.

Je-li $k = n$, pak $\mathcal{O}$ je otevřená podmnožina $\mathbf{R}^n$. Nechť orientace $\mathcal{O}$ je přirozená, čímž rozumíme, že identické zobrazení je kladná parametrizace. Potom normála $\vec{\nu}_\Gamma$ ke Γ "směřuje ven z Ω", totiž pro dostatečně malá $t > 0$ máme

$$x + t\,\vec{\nu}_\Gamma(x) \notin \Omega, \quad x - t\,\vec{\nu}_\Gamma(x) \in \Omega.$$

Je-li $k = 1$, uvažujme případ, že křivka $\mathcal{O}$ je difeomorfní obraz intervalu a Ω je podinterval. Pak "probíháme-li křivku Ω ve směru tečného vektoru $\vec{\tau}_\Omega$, počáteční bod a je záporně orientovaný a koncový bod b kladně."

Pro $n = 3$ a $k = 2$ platí pravidlo pravé ruky: "trčí-li palec ve směru normály $\vec{\nu}_\Omega$, pak zakřivené prsty ukazují kam směřuje $\vec{\tau}_\Gamma$." V bodě $x \in \Gamma$ máme kromě normály $\vec{\nu}_\Omega$ ještě normálu $\vec{\nu}_\Gamma$ vnější vzhledem k Ω, tj. jednotkový vektor, který leží v $T_x(\mathcal{O})$, je kolmý na $T_x(\Gamma)$ a "směřuje ven z Ω", totiž existuje $\gamma : (-1, 1) \to \mathcal{O}$ tak, že $\gamma((-1, 0)) \subset \Omega$, $\gamma((0, 1)) \cap \Omega = \emptyset$ a $\gamma'(0) = \vec{\nu}_\Gamma(x)$. Potom

$$\vec{\nu}_\mathcal{O}(x) = \vec{\nu}_\Gamma(x) \times \vec{\tau}_\Gamma(x).$$

Pro $n = k = 2$ "tečný vektor obíhá Ω proti směru hodinových ručiček". Z obecného případu $n = k$ známe orientaci $\vec{\nu}_\Gamma(x)$. Odtud určíme $\vec{\tau}_\Gamma(x) = \nu_1 \vec{e}_2 - \nu_2 \vec{e}_1$, kde $\vec{\nu} = \vec{\nu}_\Gamma(x)$.

13.13. Divergence, gradient, rotace. Nechť $U \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $u : U \to \mathbf{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce a $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbf{R}^n$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole. Definujeme

$$\nabla u = \overrightarrow{\ }\operatorname{grad} u := \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \vec{e}_i\,, \qquad \text{(gradient } u\text{)},$$

$$\operatorname{div} \vec{f} := \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,, \qquad \text{(divergence } \vec{f}\text{)}$$

$$\operatorname{curl} \vec{f} = \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \qquad \text{(rotace } \vec{f},\ n = 2\text{)},$$

$$\overrightarrow{\ }\operatorname{curl} \vec{f} := \left(\tfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \vec{e}_1 + \left(\tfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \vec{e}_2 + \left(\tfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \vec{e}_3 \qquad \text{(rotace } \vec{f},\ n = 3\text{)}.$$

13.14. Důsledky Stokesovy věty. Nechť $U \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $u : U \to \mathbf{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce a $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n) : U \to \mathbf{R}^n$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole. Předpokládejme, že U, Ω a Γ splňují předpoklady věty 13.8. V druhém řádku předpokládáme, že Γ sestává z kladně orientovaného bodu b a záporně orientovaného bodu a.

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,dS &= \int_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\,dx \quad (k=n,\ \text{Gauss, věta o divergenci}),\\
u(b)-u(a) &= \int_\Omega \overrightarrow{\rightarrow}\operatorname{grad} u\cdot\vec{\tau}\,ds \quad (k=1,\ \text{věta o potenciálu}),\\
\int_\Gamma \vec{f}\cdot\vec{\tau}\,ds &= \int_\Omega \overrightarrow{\rightarrow}\operatorname{curl}\vec{f}\cdot\vec{\nu}\,dS \quad (n=3,\ k=2,\ \text{Stokes}),\\
\int_\Gamma \vec{f}\cdot\vec{\tau}\,ds &= \int_\Omega \operatorname{curl}\vec{f}\,dx \quad (n=k=2,\ \text{Green}).
\end{aligned}$$

14. Věty o konvergenci

Buď $(X,\mathcal{S},\mu)$ prostor s mírou.

14.1. Čebyševova nerovnost. *Nechť $f\ge 0$ je měřitelná funkce na $D\in\mathcal{S}$ a $a>0$. Potom*

$$\mu(D\cap\{f\ge a\})\le \frac{\int_D f\,d\mu}{a}.$$

Důkaz. Zřejmě

$$\mu(D\cap\{f\ge a\})\le \int_{D\cap\{f\ge a\}}\frac{f}{a}\,d\mu\le\frac{\int_D f\,d\mu}{a}.$$

□

14.2. Konvergence v míře. Nechť f, f_j, $j=1,2,\dots$, jsou měřitelné funkce na $D\in\mathcal{S}$. Řekneme, že $f_j\to f$ v míře, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ platí

$$\lim_{j\to\infty}\mu\big(\{|f_j-f|\ge\varepsilon\}\big)=0.$$

14.3. ε-δ spojitost integrálu. *Nechť f je integrovatelná funkce na X. Potom ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že pro všechna $E\in\mathcal{S}$ platí*

$$\mu(E)<\delta \implies \int_E |f|\,d\mu<\varepsilon.$$

Důkaz. Nechť

$$E_j=\{|f|\ge j\}.$$

Podle Lebesgueovy věty 3.8 (majoranta $|f|$) je

$$\lim_{j\to\infty}\int_{E_j}|f|\,d\mu=\lim_{j\to\infty}\int_X|f|\chi_{E_j}\,d\mu=0,$$

takže existuje $k\in\mathbf{N}$ tak, že

$$\int_{E_k}|f|\,d\mu<\varepsilon.$$

Nechť $E\in\mathcal{S}$, $\mu(E)<\delta:=\mu(E_k)$. Potom

$$\begin{aligned}
\int_E|f|\,d\mu &= \int_{E\cap E_k}|f|\,d\mu+\int_{E\setminus E_k}|f|\,d\mu\\
&\le \int_{E\cap E_k}|f|\,d\mu+k\,\mu(E\setminus E_k)\le\int_{E\cap E_k}|f|\,d\mu+k\,\mu(E_k\setminus E)\\
&\le \int_{E\cap E_k}|f|\,d\mu+\int_{E_k\setminus E}|f|\,d\mu=\int_{E_k}|f|\,d\mu\\
&<\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

14.4. Jegorovova věta. *Nechť $(X,\mathcal{S},\mu)$ je prostor s mírou, která je konečná. Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost $\mathcal{S}$-měřitelných funkcí na X. Předpokládejme, že $f_j\to f$ skoro všude. Potom pro každé $\varepsilon>0$ existuje množina $G\in\mathcal{S}$ tak, že $\mu(G)<\varepsilon$ a $f_j\to f$ stejnoměrně na $X\setminus G$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $f = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Označme

$$E_k^j = \bigcup_{i \geq j} \{|f_i| \geq 1/k\}.$$

Potom

$$\lim_j \mu(E_k^j) = \mu\Big(\bigcap_j E_k^j\Big) = 0$$

(zde jsme využili, že $\mu(X) < \infty$, viz. 1.14(c)), a proto existuje $G_k \in \{E_k^j : j \in \mathbf{N}\}$ tak, že

$$\mu(G_k) < 2^{-k}\varepsilon.$$

Položme

$$G = \bigcup_k G_k.$$

Potom $\mu(G) < \varepsilon$. Je-li dáno přirozené k, potom existuje přirozené j tak, že $G_k = E_k^j$. Je-li $i \geq j$ a $x \notin G$, potom $|f_i(x)| < 1/k$. Tedy $f_j \to 0$ stejnoměrně na $X \setminus G$. □

14.5. Cantelliho věta. *Nechť $\{E_j\}$ je posloupnost měřitelných podmnožin X. Jestliže*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \infty,$$

potom

$$\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\Big) = 0.$$

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\Big) &\leq \inf_{k \in \mathbf{N}} \mu\Big(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\Big) \\ &\leq \inf_{k \in \mathbf{N}} \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) = 0.\end{aligned}$$

□

14.6. Vztah konvergence v míře, konvergence skoro všude a konverence v L^p. Nechť f, f_j jsou měřitelné funkce na X. Připomeňme, že konvergence $f_j \to f$ v L^p znamená podle definice $\|f_j - f\|_p \to 0$.

(a) *Nechť $f_j \to f$ v $L^p(X)$. Potom $f_j \to f$ v míře.*

To je snadný důsledek Čebyševovy nerovnosti 14.1.

(b) *Nechť $f_j \to f$ v míře. Nechť existuje "integrovatelná majoranta" $g \in L^p(X)$, $p < \infty$, tak, že $|f_j| \leq g$ skoro všude, $j = 1, 2, \dots$. Potom $f_j \to f$ v $L^p(X)$.*

Bez újmy na obecnosti $f = 0$. Pro každé $\varepsilon > 0$ máme

$$\begin{aligned}\int_X |f_j|^p \, d\mu &\leq \int_{\{|f_j| \leq \varepsilon |g|\}} |f_j|^p \, d\mu + \int_{\{g < \varepsilon\}} |f_j|^p \, d\mu + \int_{\{|f_j| \geq \varepsilon^2\}} |f_j|^p \, d\mu \\ &\leq \varepsilon \int_X |g|^p \, d\mu + \int_{\{g < \varepsilon\}} |g|^p \, d\mu + \int_{\{|f_j| \geq \varepsilon^2\}} |g|^p \, d\mu.\end{aligned}$$

První integrál jde k nule pro $\varepsilon \to 0$. Druhý také, to plyne z Lebesgueovy věty 3.8 s majorantou g. Třetí integrál jde k nule pro $j \to \infty$ z věty 14.3 a definice konvergence v míře.

(c) *Nechť $\mu(X) < \infty$. Jestliže $f_j \to f$ skoro všude, pak $f_j \to f$ v míře.*

To je snadný důsledek Jegorovovy věty 14.4.

(d) *Jestliže $f_j \to f$ v míře, pak existuje vybraná posloupnost, která konverguje skoro všude.*

Bez újmy na obecnosti $f = 0$. Položme $f_j^{(0)} = f_j$ a pro $m = 1, 2, \dots$ najdeme $\{f_j^{(m)}\}_j$ vybranou z $\{f_j^{(m-1)}\}_j$ tak, že

$$\sum_j \mu\big(\{|f_j^{(m)}| \geq 1/m\}\big) < \infty.$$

Podle Cantelliho věty 14.5 je pak i

$$\mu(E_m) = 0, \text{ kde } E_m = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \{|f_j^{(m)}| \geq 1/m\}.$$

Zřejmě

$$x \notin E_m \implies \limsup_j |f_j^{(m)}(x)| \leq 1/m.$$

Položme $g_j = f_j^{(j)}$. Potom pro každé m je $\{g_j\}_j$ až na konečně mnoho členů vybraná posloupnost z $\{f_j^{(m)}\}_j$, tedy $g_j \to 0$ skoro všude.

15. Vektorové míry

15.1. Ideál. Nechť $\mathcal{S}$ je σ-algebra. Systém množin $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ se nazývá *ideál* σ-algebry $\mathcal{S}$, je-li splněno

(I-1) $A \in \mathcal{I}$, $B \in \mathcal{S}$, $B \subset A \implies B \in \mathcal{I}$,
(I-2) $A \in \mathcal{I}$, $B \in \mathcal{I} \implies A \cup B \in \mathcal{I}$.

15.2. Vektorová míra. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$. Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze. Množinová funkce $\nu : \mathcal{I} \to \mathbf{V}$ se nazývá *obecná vektorová míra* na $\mathcal{S}$, jestliže splňuje

(VeM-1) $\mathcal{I}$ je ideál σ-algebry $\mathcal{S}$,
(VeM-1) $\nu(\emptyset) = 0$,
(VeM-2) jestliže $A_j \in \mathcal{I}$, $j = 1, 2, \dots$, jsou po dvou disjunktní, $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, potom

$$A \in \mathcal{I} \implies \nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j).$$

Poznamenejme výslovně, že říkáme obecná vektorová míra na $\mathcal{S}$, ačkoli definiční obor je pouze $\mathcal{I}$.

Jestliže $\mathcal{I} = \mathcal{S}$, pak se ν nazývá se *konečná vektorová míra*. Množiny, které neleží v $\mathcal{I}$ jsou "podezřelé" z toho, že na ně nemůžeme ν rozšířit při zachování podmínky konečnosti.

Jestliže $X = \bigcup X_j$, kde $X_j \in \mathcal{I}$, řekneme, že ν je *σ-konečná*.

Jestliže $\mathbf{V} = \mathbf{R}$, používáme místo "vektorová míra" název "znaménková míra" nebo "náboj".

15.3. Variace vektorové míry. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ je ideál a $\nu : \mathcal{I} \to \mathbf{V}$ je obecná vektorová míra na $\mathcal{S}$. Pro $E \in \mathcal{S}$ definujme

$$|\nu|(E) = \sup\Big\{\sum_j |\nu(E_j)| : \ E_j \in \mathcal{I} \text{ jsou po dvou disjunktní, } \bigcup_j E_j \subset E\Big\}.$$

Množinová funkce $|\nu|$ se nazývá *variace* vektorové míry ν. V definici variace není podstatné, zda uvažujeme konečné či nekonečné součty. Také můžeme uvažovat jen takové součty, že sjednocení množin E_j je celé E.

15.4. Variace míry je míra. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ je ideál a $\nu : \mathcal{I} \to \mathbf{V}$ je obecná vektorová míra na $\mathcal{S}$. Potom $|\nu|$ je míra na $\mathcal{S}$.*

Důkaz. Uvažujme posloupnost $\{E_j\}$ po dvou disjunktních měřitelných množin a jejich sjednocení E. Jsou-li

$$\sum_i |\nu(E_j^i)|$$

dolní součty k $|\nu|(E_j)$, $j = 1, 2, \dots$, pak

$$\sum_{i,j} |\nu(E_j^i)|$$

je dolní součet k $|\nu|(E)$. Odtud

$$|\nu|(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\nu|(E_j). \tag{15.1}$$

Naopak, buď

$$\sum_k |\nu(A_k)|$$

dolní součet k $|\nu|(E)$. Potom z (VeM-3) dostaneme

$$|\nu(A_k)| = |\sum_j \nu(A_k \cap E_j))| \le \sum_j |\nu|(A_k \cap E_j), \qquad k = 1, 2, \dots$$

a z (15.1) plyne

$$\sum_k |\nu|(A_k \cap E_j) \le |\nu|(E_j), \qquad j = 1, 2, \dots .$$

Tedy

$$\sum_k |\nu(A_k)| \le \sum_k \Big(\sum_j |\nu|(A_k \cap E_j) \Big) = \sum_j \Big(\sum_k |\nu|(A_k \cap E_j) \Big)$$
$$\le \sum_j |\nu|(E_j).$$

Přechodem k supremu přes všechny dolní součty k $|\nu|(E)$ dostáváme

$$|\nu|(E) \le \sum_j |\nu|(E_j). \tag{15.2}$$

Z (15.1) a (15.2) plyne, že $|\nu|$ je míra. □

15.5. Lemma o variaci. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ je ideál a $\nu : \mathcal{I} \to \mathbf{V}$ je obecná vektorová míra. Nechť $A \in \mathcal{I}$. Jestliže $|\nu|(A) = \infty$, potom existuje $\tilde{A} \in \mathcal{I}$ tak, že*

$$\tilde{A} \subset A, \quad |\nu|(\tilde{A}) \ge 1, \quad |\nu|(A \setminus \tilde{A}) = \infty.$$

Důkaz. Především si uvědomme, že stačí najít $A' \in \mathcal{S}$ tak, že

$$A' \subset A, \quad |\nu|(A') \ge 1, \quad |\nu|(A \setminus A') \ge 1.$$

Totiž, jelikož $|\nu|(A) = \infty$, aspoň jedna z množin A', $A \setminus A'$ musí mít nekonečnou variaci. Uvažujme posloupnost $\{A_j\}$ po dvou disjunktních množin z $\mathcal{S}$ takovou, že $A_j \subset A$ a

$$\sum_j |\nu(A_j)| > |\nu(A)| + 3. \tag{15.3}$$

Nyní rozlišíme dva případy. Jestliže existuje i tak, že $|\nu(A_i)| \ge 1$, potom položme

$$A' = A_i.$$

Máme

$$\nu(A_i) = \nu(A) - \nu(A \setminus A_i),$$

tedy

$$|\nu(A_i)| \le |\nu(A)| + |\nu(A \setminus A_i)| \le |\nu(A)| + \sum_{j \ne i} |\nu(A_j)|. \tag{15.4}$$

Sečtením (15.3) a (15.4) dostaneme

$$|\nu(A_i)| + |\nu(A)| + 3 \le |\nu(A)| + |\nu(A_i)| + 2 \sum_{j \ne i} |\nu(A_j)|.$$

Tedy

$$|\nu|(A \setminus A') \ge \sum_{j \ne i} |\nu(A_j)| \ge 3/2 > 1.$$

Druhý případ je, že pro $|\nu(A_i)| < 1$ pro všechna i. Najdeme nejmenší k tak, že

$$\sum_{j \le k} |\nu(A_j)| \ge 1,$$

a položíme

$$A' := \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

Potom

$$|\nu|(A') \ge \sum_{j \le k} |\nu(A_j)| \ge 1.$$

Z minimality k dostaneme

$$\sum_{j\le k}|\nu(A_j)|\le\sum_{j<k}|\nu(A_j)|+|\nu(A_k)|\le 1+1=2,$$

tedy (15.3) dává

$$\sum_{j>k}|\nu(A_j)|\ge|\nu(A)|+3-2\ge 1.$$

Odtud dostaneme

$$|\nu|(A\setminus A')\ge\sum_{j>k}|\nu(A_j)|\ge 1.$$

$\square$

15.6. Věta o variaci. *Nechť $(X,\mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $\mathcal{I}\subset\mathcal{S}$ je ideál a $\nu:\mathcal{I}\to\mathbf{V}$ je obecná vektorová míra. Potom pro každou $E\in\mathcal{I}$ je $|\nu|(E)<\infty$.*

Důkaz. Budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že $E\in\mathcal{I}$ a $|\nu|(E)=\infty$. S pomocí lemmatu 15.5 najdeme $E_1\in\mathcal{I}$, tak, že

$$E_1\subset E,\quad |\nu|(E_1)\ge 1,\quad |\nu|(E\setminus E_1)=\infty.$$

Nyní použijeme lemma 15.5 na $E\setminus E_1$ a dostaneme $E_2\in\mathcal{I}$ tak, že

$$E_2\subset E\setminus E_1,\quad |\nu|(E_2)\ge 1,\quad |\nu|((E\setminus E_1)\setminus E_2)=\infty.$$

Takto postupně rekurentně zkonstruujeme posloupnost $\{E_k\}$ po dvou disjunktních měřitelných podmnožin E tak, že $|\nu|(E_k)\ge 1$. Ke každé z nich najdeme dolní součet

$$\sum_j|\nu(E_k^i)|\ge 1/2,\qquad E_k^i\in\mathcal{S},\ E_k^i\subset E_k \text{ po dvou disjunktní.}$$

Buď ještě

$$E_0=E\setminus\sum_{k,i}E_k^i.$$

Potom podle (VeM-3)

$$\nu(E)=\nu(E_0)+\sum_{k,i}\nu(E_k^i). \tag{15.5}$$

Řada na pravé straně nemůže konvergovat absolutně, proto ji lze přerovnat tak, aby rovnost (15.5) neplatila a tím dostáváme spor. $\square$

15.7. Jordanův rozklad znaménkové míry na kladnou a zápornou část. Nechť $(X,\mathcal{S})$ je měřitelný prostor, $\mathcal{I}\subset\mathcal{S}$ je ideál a $\nu:\mathcal{I}\to\mathbf{R}$ je obecná znaménková míra. Potom existuje (právě jedna) dvojice (ν^+,ν^-) (nezáporných) měr na $(X,\mathcal{S})$ tak, že

$$\nu(E)=\nu^+(E)-\nu^-(E),\quad E\in\mathcal{I},$$
$$|\nu(E)|=\nu^+(E)+\nu^-(E),\quad E\in\mathcal{S}.$$

Míra ν^+ se nazývá *kladná část* ν, míra ν^- se nazývá *záporná část* ν a rozklad $\nu=\nu^+-\nu^-$ se nazývá *Jordanův rozklad*. Pro $E\in\mathcal{I}$ dostaneme $\nu^+(E)$ a $\nu^-(E)$ ze vzorce

$$\nu^+(E)=\frac{|\nu|(E)+\nu(E)}{2},\quad \nu^-(E)=\frac{|\nu|(E)-\nu(E)}{2}.$$

Rozšíření z $\mathcal{I}$ na $\mathcal{S}$ se nejsnáze provede operátorem variace, detaily ponecháme čtenáři.

15.8. Integrování podle obecné znaménkové či vektorové míry. Nechť ν je obecná znaménková míra na $(X,\mathcal{S})$. a f je $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na $D\in\mathcal{S}$. Definujeme

$$\int_D f\,d\nu=\int_D f\,d\nu^+-\int_D f\,d\nu^-$$

pokud rozdíl vpravo má smysl.

Je-li nyní $\nu:\mathcal{I}\to\mathbf{V}$ obecná vektorová míra, najdeme vyjádřená vzhledem k nějaké bázi $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m)$ prostoru $\mathbf{V}$:

$$\nu=\sum_{i=1}^m\nu_i\vec{e}_i,$$

a definujeme

$$\int_D f\,d\nu = \sum_{i=1}^{m} \Big(\int_D f\,d\nu_i \Big)\, \vec{e}_i.$$

16. Věty o reprezentaci funkcionálů na L^p

16.1. Dualita v normovaných lineárních prostorech. *Funkcionál* je termín označující funkci na normovaném lineárním prostoru nebo jeho podmnožině s číselnými hodnotami. Zde uvažujeme pouze reálnou teorii, tedy funkcionály mají hodnoty v $\mathbf{R}$. Nechť $\mathcal{X}$ je normovaný lineární prostor. Množina všech spojitých lineárních funkcionálů na $\mathcal{X}$ se nazývá *duál* k $\mathcal{X}$. Připomeňme, že lineární funkcionál f na X je spojitý, právě když existuje $C \in \mathbf{R}$ tak, že

$$|f(x)| \le C\|x\|_{\mathcal{X}}, \qquad x \in \mathcal{X}.$$

16.2. Norma funkcionálu. Nechť Φ je spojitý lineární funkcionál na $L^p(X)$. Pak značíme

$$\|\Phi\| := \sup\Big\{ |\Phi(u)| : u \in L^p(X),\ \|u\|_p \le 1 \Big\}.$$

Pro každé $u \in L^p(X)$ pak máme

$$|\Phi(u)| \le \|\Phi\|\,\|u\|_p$$

16.3. Dualita mezi L^p a L^q. *Nechť $X = (X, \mathcal{S}, \mu)$. Nechť $1 \le p \le \infty$. Buď $q = \infty$ když $p = 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ když $1 < p < \infty$ a $q = 1$ když $p = \infty$. Nechť $v \in L^q(X)$. Potom*

$$u \mapsto \int_X uv\,d\mu$$

je spojitý lineární funkcionál na $L^p(X)$.

Důkaz. Pro $1 < p < \infty$ dostáváme důkaz z Hölderovy nerovnosti, jinak je snadný. □

16.4. Charakterizace spojitých lineárních funkcionálů na L^2. *Nechť $X = (X, \mathcal{S}, \mu)$. Nechť Φ je spojitý lineární funkcionál na $L^2(X)$. Potom existuje $v \in L^2(X)$ tak, že*

$$\Phi(u) = \int_X uv\,d\mu$$

pro všechna $u \in L^2(X)$.

Důkaz. Jelikož $L^2(X)$ vybavený skalárním součinem

$$(u; v) := \int_X uv\,d\mu$$

je Hilbertův prostor, dostáváme tvrzení z obecné Rieszovy věty o reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů na Hilbertových prostorech. □

16.5. Spojité lineární funkcionály na L^p, $1 < p < \infty$. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, která je σ-konečná. Nechť $1 < p < \infty$ a $q = p/(p-1)$. Nechť Φ je spojitý lineární funkcionál na $L^p(X)$. Potom existuje právě jeden prvek $v \in L^q(X)$ tak, že*

$$\Phi(u) = \int_X uv\,d\mu$$

pro všechna $u \in L^p(X)$. Přitom

$$\|\Phi\| = \|v\|_q. \tag{16.1}$$

Důkaz. Myšlenka je použít tzv. Radon–Nikodýmovu větu na míru

$$\nu(E) = \Phi(\chi_E),$$

avšak když $\mu(X) = \infty$, může se stát, že $\chi_E \notin L^p(X)$. Proto najděme $X_k \in \mathcal{S}$, $k = 1, 2, \dots$ tak, že

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots, \qquad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Pro $E \in \mathcal{S}$ položme

$$\nu_k(E) = \Phi(\chi_{E \cap X_k}).$$

Potom ν_k je znaménková míra na $\mathcal{S}$ absolutně spojitá vzhledem k μ, což znamená, že platí implikace

$$\mu(E) = 0 \implies \nu_k(E) = 0.$$

Podle Radon–Nikodýmovy věty 17.3, kterou dokážeme později, existuje v takovém případě μ-skoro všude konečná $\mathcal{S}$-měřitelná funkce v_k tak, že

$$\nu_k(E) = \int_E v_k \, d\mu \tag{16.2}$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$. Snadno nahlédneme, že pro j, k přirozená platí

$$v_k = v_j \text{ skoro všude na } X_j \cap X_k.$$

Tedy existuje

$$v = \lim_k v_k$$

ve smyslu konvergence skoro všude a

$$v = v_k \text{ skoro všude na } X_k.$$

Jestliže $E \in S$ a $E \subset X_k$ pro některé přirozené k, pak z (16.2) odvodíme

$$\Phi(\chi_E) = \int_E v_k \, d\mu = \int_E v \, d\mu.$$

Rutinním postupem (aproximace, přes jednoduché funkce) odtud dostaneme

$$\Phi(u) = \int_X uv \, d\mu \tag{16.3}$$

pokud $u \in L^p(X)$ a integrál na pravé straně konverguje. Označme

$$E_k = X_k \cap \{|v| \le k\},$$
$$u_k = |v|^{q-2} \, v \, \chi_{E_k}.$$

Potom $u_k \in L^p(X)$ a

$$\begin{aligned}\int_{E_k} |v|^q \, d\mu &= \Phi(u_k) \le \|\Phi\| \, \|u_k\|_p \\ &\le \|\Phi\| \Big(\int_X u_k^p \, d\mu\Big)^{1/p} = \|\Phi\| \Big(\int_{E_k} |v|^q \, d\mu\Big)^{1/p},\end{aligned}$$

takže po krácení

$$\Big(\int_{E_k} |v|^q \, d\mu\Big)^{1/q} \le \|\Phi\|.$$

Leviho věta 3.9 dává

$$\|v\|_q = \lim_k \Big(\int_{E_k} |v|^q \, d\mu\Big)^{1/q} \le \|\Phi\|. \tag{16.4}$$

Je-li $u \in L^p$, pak z Hölderovy nerovnosti plyne

$$\int_X |uv| \, d\mu \le \|u\|_p \, \|v\|_q.$$

Tedy (16.3) je splněno. Zbývá dokázat (16.1). Je-li $u \in L^p(X)$, $\|u\|_p \le 1$, potom

$$|\Phi(u)| = |\int_X uv \, d\mu| \le \|u\|_p \|v\|_q \le \|v\|_q,$$

tedy $\|\Phi\| \le \|v\|_q$. Opačná nerovnost je v (16.4). ☐

16.6. Spojité lineární funkcionály na L^1. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, která je σ-konečná. Nechť Φ je spojitý lineární funkcionál na $L^1(X)$. Potom existuje právě jeden prvek $v \in L^\infty(X)$ tak, že*

$$\Phi(u) = \int_X uv \, d\mu$$

pro všechna $u \in L^1(X)$. Přitom

$$\|\Phi\| = \|v\|_\infty.$$

Důkaz. Důkaz je analogický jako u věty 16.5. Najdeme μ-skoro všude konečnou $\mathcal{S}$-měřitelnou funkci v tak, že

$$\Phi(u) = \int_X uv\,d\mu$$

kdykoli $u \in L^1(X)$ a integrál na pravé straně konverguje. Klíčový krok, v němž se důkaz liší od důkazu předchozí věty, je odhad

$$\|v\|_\infty \le \|\Phi\|. \tag{16.5}$$

Můžeme předpokládat, že $\|v\|_\infty > 0$, jinak je (16.5) triviální. Nechť X_k jsou jako v důkazu věty 16.5. Potom

$$\|v\|_\infty = \lim_{k\to\infty} \|v\chi_{X_k}\|_\infty.$$

Nejdeme tedy posloupnost $\{a_k\}$ kladných reálných čísel tak, že

$$\mu(X_k \cap \{|v| > a_k\}) > 0 \quad \text{a} \quad \lim_k a_k = \|v\|_\infty. \tag{16.6}$$

Položme

$$\begin{aligned} E_k &= \{|v| > a_k\}, \\ u_k &= \frac{v}{|v|}\chi_{X_k\cap E_k}. \end{aligned}$$

Potom $u_k \in L^1(X)$ a máme

$$\begin{aligned} a_k\,\mu(E_k\cap X_k) \le \int_{E_k\cap X_k} |v|\,d\mu = \int_X u_k v\;d\mu = \Phi(u_k) \le \|\Phi\|\,\|u_k\|_1 \\ \le \|\Phi\|\,\mu(E_k\cap X_k). \end{aligned}$$

Podle (16.6) můžeme krátit a dostáváme

$$a_k \le \|\Phi\|.$$

Limitní přechod $j \to \infty$ dává

$$\|v\|_\infty \le \|\Phi\|.$$

Dále zase postupujeme analogicky jako v důkazu věty 16.5. □

.

16.7. Spojité lineární funkcionály na L^∞. Spojité lineární funkcionály na $L^\infty(X)$ obecně nejde charakterizovat tak jednoduše jako když $p < \infty$. Kdybychom chtěli kopírovat důkaz, přišli bychom (zhruba řečeno!) na to, že jsou-li $E_k \in \mathcal{S}$ po dvou disjunktní, řada

$$\sum_k \chi_{E_k}$$

nemusí konvergovat v L^∞ a tudíž

$$E \mapsto \Phi(\chi_{E_k})$$

nemusí být σ-additivní.

17. Derivování a rozklad měr

17.1. Absolutní spojitost a singulárnost. Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť μ a ν jsou míry na $\mathcal{S}$. Řekneme, že ν je *absolutně spojitá vzhledem k* μ, značení $\nu << \mu$, jestliže pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí

$$\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0. \tag{17.1}$$

Řekneme, že ν a μ jsou navzájem *singulární*, značení $\mu - \nu$, jestliže existují X_μ, $X_\nu \in \mathcal{S}$ tak, že

$$X = X_\mu \cup X_\nu, \qquad \mu(X_\nu) = \nu(X_\mu) = 0. \tag{17.2}$$

Budeme uvažovat i případ, že ν je obecná znaménková míra. Potom definice absolutní spojitosti zůstává beze změny a v definici singularity požadujeme $|\nu|(X_\mu) = 0$.

17.2. Míra s hustotou. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $f : X \to \mathbf{R}$ je μ-měřitelná funkce. Položme

$$\mathcal{I} = \{E : \int_E f\, d\mu \text{ konverguje}\}.$$

Pro $E \in \mathcal{I}$ buď

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Potom ν je obecná znaménková míra, která se nazývá *míra s hustotou* f. Naopak f se v této situaci nazývá *hustota* nebo *Radon-Nikodýmova derivace* míry ν (vzhledem k μ) a značí $\frac{d\nu}{d\mu}$.

17.3. Lebesgue–Radon–Nikodýmova věta. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ je ideál a $\nu\, \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ je obecná znaménková míra na $\mathcal{S}$. Nechť míry μ a ν jsou σ-konečné. Potom*

(a) (Lebesgueova věta) *existuje právě jedna obecná znaménková míra míra $\nu_a : \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ na $\mathcal{S}$ tak, že $\nu_a << \mu$ a $(\nu - \nu_a) - \mu$,*

(b) (Radon–Nikodýmova věta) *existuje právě jedna (až na modifikace na množinách μ-míry nula) μ-skoro všude konečná $\mathcal{S}$-měřitelná funkce f tak, že*

$$\nu_a(E) = \int_E f\, d\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{I}$, neboli $f = \frac{d\nu_a}{d\mu}$.

Důkaz. Tvrzení o jednoznačnosti je velmi snadné. Např. v části (a) si uvědomíme, že pokud by existovaly různé míry ν_1 a ν_2 s vlastnostmi, které vyžadujeme od ν_a, pak $\nu_1 - \nu_2$ by byla absolutně spojitá vzhledem k μ. Současně

$$\nu_1 - \nu_2 = (\nu - \nu_2) - (\nu - \nu_1),$$

takže míry $\nu_1 - \nu_2$ a μ by byly navzájem singulární. Uvažujme rozklad $X = X_a \cup X_s$, kde

$$|\nu_1 - \nu_2|(X_a) = \mu(X_s) = 0.$$

Potom z absolutní spojitosti bychom dostali, že též $|\nu_1 - \nu_2|(X_s) = 0$, takže $|\nu_1 - \nu_2| = 0$, spor.

Důkaz existence rozdělíme do několika kroků

1. KROK: Nejprve předpokládejme, že ν a μ jsou konečné (nezáporné) míry na $\mathcal{S}$. Označme $\sigma = \mu + \nu$. Potom

$$\Phi :\ u \mapsto \int_X u\, d\nu$$

je spojitý lineární funkcionál na $L^2(\sigma)$. Tudíž podle věty 16.4 existuje $v \in L^2(\sigma)$ tak, že

$$\Phi(u) = \int_X uv\, d\sigma,$$

neboli

$$\int_X u\, d\nu = \int_X uv\, d\mu + \int_X uv\, d\nu \tag{17.3}$$

pro každou $u \in L^2(\sigma)$. Položme

$$X_a = \{v < 1\}, \qquad X_s = \{v \geq 1\}, \qquad X_0 = \{v < 0\}.$$

Potom volba $u = \chi_{X_s}$ dává

$$\nu(X_s) = \int_{X_s} v\, d\sigma \geq \sigma(X_s) = \mu(X_s) + \nu(X_s) \geq \nu(X_s).$$

Odtud vidíme, že $v = 1$ skoro všude na X_s a $\mu(X_s) = 0$. Testujeme-li (17.3) funkcí $u = \chi_{X_0}$, dostaneme $\sigma(X_0) = 0$. Definujme míry ν_a a ν_s předpisem

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap X_a), \quad \nu_s(E) = \nu(E \cap X_s), \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Potom z toho, co jsme doposud dokázali plyne, že μ a ν_s jsou navzájem singulární. Vzorec (17.3) můžeme přepsat v podobě

$$\int_E gv\, d\mu = \int_E g\,(1 - v)\, d\nu, \tag{17.4}$$

kde g je nezáporná $\mathcal{S}$-měřitelná funkce, $E \in \mathcal{S}$ a za u jsme dosadili $g\chi_E$. Vzorec (17.4) určitě platí pro každou nezápornou $\mathcal{S}$-měřitelnou funkci g: i kdyby nebyla integrovatelná, můžeme ji zdola aproximovat jednoduchými funkcemi, které integrovatelné jsou, a pak použít Leviho větu 3.8. Nechť $E \in \mathcal{S}$. Položme

$$g = \frac{\chi_{E\cap X_a}}{1-v}, \qquad f = vg.$$

Potom (17.4) dává

$$\int_E f\,d\mu = \nu(E \cap X_a) = \nu_a(E).$$

Odtud plyne tvrzení (b) věty i absolutní spojitost ν_a vzhledem k μ.

2. KROK. Předpokládejme nyní, že ν je znaménková míra, pořád ještě konečná. Potom aplikujeme předchozí část na kladnou a zápornou část míry ν (Jordanův rozklad, viz. 15.7) a využijeme toho, že

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

3. KROK. Jsou-li míry μ, ν σ-konečné, rozdělíme X na spočetně mnoho $\mathcal{S}$-měřitelných částí, na nichž jsou obě míry konečné, použijeme předchozí kroky a nalezené objekty "poslepujeme". Podrobnosti jsou nezajímavé. □

17.4. Absolutně spojitá a singulární čast. Míře ν_a z věty 17.3 se říká *absolutně spojitá část* míry ν a míře $\nu_s := \nu - \nu_a$ se říká *singulární část* míry ν. Rozkladu $\nu = \nu_a + \nu_s$ se říká *Lebesgueův rozklad* míry ν.

17.5. Integrování podle míry s hustotou. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou, ν je konečná míra na $(X, \mathcal{S})$ a g je $\mathcal{S}$-měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom*

$$\int_D g\,d\nu = \int_D g\,\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu,$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Podle definice tvrzení platí, když g je charakteristická funkce měřitelné množiny. Zbytek je rutinní záležitost (jednoduché funkce, limitní přechod). □

17.6. Hahnův rozklad znaménkové míry. Nechť ν je σ-konečná znaménková míra na $(X, \mathcal{S})$. Dvojici (P, N) množin z $\mathcal{S}$ nazveme *Hahnův rozklad* míry ν, jestliže $P \cup N = X$, $P \cap N = \emptyset$ a pro každou $E \in \mathcal{S}$ je

$$\nu(E \cap P) \geq 0, \quad \nu(E \cap N) < 0.$$

Potom také pro každou $E \subset \mathcal{S}$ zřejmě platí

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P), \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap N).$$

Existence Hahnova rozkladu plyne snadno z Radon-Nikodýmovy věty: je-li $f = \frac{d\nu}{d|\nu|}$, pak $(\{f > 0\}, \{f \leq 0\})$ je Hahnův rozklad. Jiná možnost je třeba $(\{f \geq 0\}, \{f < 0\})$. Jednoznačnost je splněna v té podobě, že jsou-li (P_i, N_i) Hahnovy rozklady, $i = 1, 2$, pak $|\nu|(P_1 \setminus P_2) = |\nu|(N_1 \setminus N_2) = 0$.

17.7. Spojité a diskrétní míry. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Předpokládejme, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny jednobodové množiny. Řekneme, že míra μ na $\mathcal{S}$ je

- *spojitá*, jestliže $\mu(\{x\}) = 0$ pro všechna $x \in X$,
- *diskrétní*, jestliže existuje spočetná množina $S \subset X$ tak, že $\mu(X \setminus S) = 0$.

17.8. Charakterizace diskrétních měr. *Míra μ je diskrétní, právě když existuje spočetná množina $S \subset X$ a funkce $f : S \to [0, +\infty]$ tak, že*

$$\mu(E) = \sum_{x \in S \cap E} f(x), \qquad E \in \mathcal{S}.$$

Důkaz. Důkaz je zřejmý. Je-li μ diskrétní, pak $f(x) = \mu(\{x\})$. □

17.9. Rozklad míry na spojitou a diskrétní část. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou. Předpokládejme, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny jednobodové množiny. Potom existuje rozklad*

$$\mu = \mu_c + \mu_d,$$

kde μ_c je spojitá a μ_d je diskrétní.

Důkaz. Položme
$$S = \{x : \mu(\{x\}) > 0\}.$$
Jelikož μ je σ-konečná a jednobodové množiny jsou měřitelné, množina S je spočetná a měřitelná. Definujme míry μ_c a μ_d předpisem
$$\mu_c(E) = \mu(E \setminus S), \quad \mu_d(E) = \mu(E \cap S), \qquad E \in \mathcal{S}.$$
Zřejmě μ_c je spojitá a μ_d je diskrétní. □

18. Radonovy míry

18.1. Prostory spojitých funkcí na lokálně kompaktních metrických prostorech. Radonův integrál. Nechť X je metrický prostor. Řekneme, že X je *lokálně kompaktní*, jestliže každý bod $x \in X$ má okolí, jehož uzávěr je kompaktní. Řekneme, že X je σ-kompaktní, jestliže existuje posloupnost $\{X_k\}$ kompaktních podmnožin X tak, že $X = \bigcup_k X_k$.

Jako příklady lokálně kompaktních σ-kompaktních metrických prostorů mohou sloužit otevřené nebo uzavřené podprostory $\mathbf{R}^n$.

Nechť X je lokálně kompaktní σ-kompaktní metrický prostor. Označme $\mathcal{C}(X)$ lineární prostor všech spojitých funkcí na X. Je-li $f \in \mathcal{C}(X)$, označme
$$\operatorname{spt} f = \overline{\{f \neq 0\}}.$$
Množina $\operatorname{spt} f$ se nazývá *nosič* funkce f. Je-li $K \subset X$ kompaktní, definujme
$$\mathcal{C}_K(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) : \operatorname{spt} f \subset K\}$$
Konečně definujme
$$\mathcal{C}_c(X) = \bigcup \{\mathcal{C}_K(X) : \ K \subset X, \ K \text{ kompaktní}\}.$$
Pro $f \in \mathcal{C}_c(X)$ zavádíme
$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$
Funkcionál $\|...\|_\infty$ je norma na $\mathcal{C}_c(X)$, která však není považována za přirozenou normu tohoto prostoru. Nechť A je lineární funkcionál na $\mathcal{C}_c(X)$. Řekneme, že A je

- *nezáporný*, jestliže pro každou $f \in \mathcal{C}_K(X)$ platí
$$f \geq 0 \implies Af \geq 0,$$
- *spojitý*, jestliže pro každou kompaktní $K \subset X$ existuje $c_K \in \mathbf{R}$ tak, že pro každou $f \in \mathcal{C}_K(X)$ je
$$|Af| \leq c_K \|f\|_\infty.$$
Poznamenejme, že spojitost je třeba zvlášť definovat, protože na prostoru $\mathcal{C}_c(X)$ neuvažujeme normu.

Nezáporné lineární funkcionály na $\mathcal{C}_c(X)$ se nazývají *Radonovy integrály* na X.

18.2. Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů. Než přejdeme k hlavní větě, připomeneme si pár užitečných topologických vlastností lokálně kompaktních prostorů. Buď v dalším X je lokálně kompaktní metrický prostor. Je-li $U \subset X$ otevřená množina, budeme značit
$$\rho_U(x) = \operatorname{dist}(x, X \setminus U), \qquad x \in X.$$
(a) *Nechť $U \subset X$ je otevřená množina a $K \subset U$ je kompaktní množina. Potom existuje otevřená množina $G \subset X$ tak, že*
$$K \subset G \subset \overline{G} \subset U$$
a $\overline{G}$ je kompaktní.

Totiž, ke každému bodu množiny K najdeme otevřené okolí, jehož uzávěr je kompaktní a leží v U. Tato okolí tvoří otevřené pokrytí K, z něhož můžeme vybrat konečné podpokrytí. Nyní využijeme toho, že uzávěr sjednocení konečně mnoha množin je sjednocení uzávěrů.

(b) *Je-li $G \subset X$ otevřená množina, potom funkce ρ_G je nezáporná spojitá funkce. Přitom $\rho_G(x) > 0$, právě když $x \in G$. Jestliže $\overline{G}$ je kompaktní, potom $\rho_G \in \mathcal{C}_c(X)$.*

(c) *Nechť $U \subset X$ je otevřená množina a $K \subset U$ je kompaktní množina. Potom existuje $f \in \mathcal{C}_c(X)$ tak, že $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ na K a $\operatorname{spt} f \subset U$.*

Ke konstrukci použijeme část (a). Najdeme otevřenou množinu $G \subset X$ tak, že
$$K \subset G \subset \overline{G} \subset U$$

a $\overline{G}$ je kompaktní. Funkce ρ_G nabývá na K minima, neboť K je kompaktní. Buď

$$m = \min_K \rho_G.$$

Potom $m > 0$. Položme

$$f = \min\{\frac{\rho_G}{m},\ 1\},$$

pak f má požadované vlastnosti.

(d) *Nechť $K_i \subset X$, $i = 1, 2$, jsou kompaktní množiny. Potom existují disjunktní otevřené množiny $G_i \subset X$ tak, že $K_i \subset G_i$.*

Můžeme vzít

$$G_i = \{x:\ \operatorname{dist}(x, K_i) < \delta\},$$

kde δ je tak malé, že

$$\operatorname{dist}(K_1, K_2) \geq 2\delta.$$

(e) *Předpokládejme navíc, že X je σ-kompaktní. Nechť $U \subset X$ je otevřená. Potom existuje posloupnost K_j kompaktních podmnožin U tak, že*

$$U = \bigcup_j K_j.$$

Víme, že existuje posloupnost X_j kompaktních podmnožin X tak, že

$$X = \bigcup_j X_j.$$

Hledaná posloupnost je

$$K_j = X_j \cap \{x:\ \rho_U(x) \geq 2^{-j}\}.$$

(f) *Opět předpokládejme, že X je σ-kompaktní. Nechť $U \subset X$ je otevřená. Potom existuje posloupnost f_j funkcí z $\mathcal{C}_c(X)$ tak, že $0 \leq f_j \leq 1$, $\operatorname{spt} f_j \subset U$ a*

$$f_j \nearrow \chi_G.$$

Podle (e) existuje posloupnost K_j kompaktních podmnožin U tak, že

$$U = \bigcup_j K_j$$

a podle (c) existují funkce $g_j \in C_c(X)$ tak, že $0 \leq g_j \leq 1$, $g_j = 1$ na K_j a $\operatorname{spt} g_j \subset G$. Požadované vlastnosti mají $f_j = \max\{g_1, \dots, g_j\}$.

18.3. Vlastnosti Radonových integrálů. Nechť X je lokálně kompaktní metrický prostor a A je Radonův integrál A na X.

(a) Zřejmě *A je monotonní, tj. platí pro něj*

$$f, g \in \mathcal{C}_c(X),\ f \leq g \implies Af \leq Ag.$$

(b) *A je spojitý* ve smyslu definice 18.1.

Vskutku, je-li $K \subset X$ kompaktní, pak najdeme podle 18.2(c) funkci $f \in \mathcal{C}_c(X)$ tak, že $0 \leq f \leq 1$ a $f = 1$ na K. Nechť $g \in \mathcal{C}_K(X)$ a $a = \|g\|_\infty$, $c_K = Af$. Potom $\pm g \leq af$ a díky monotonii A máme

$$|Ag| \leq a\, Af = c_K \|g\|_\infty.$$

(c) *Jestliže $K \subset X$ je kompaktní, $\{f_j\}$ je posloupnost funkcí z $\mathcal{C}_K(X)$ a $f_j \to f$ stejnoměrně, potom*

$$Af_j \to Af.$$

Tvrzení je zřejmým důsledkem spojitosti.

(d) *Daniellova vlastnost. Jestliže $\{f_j\}$ je posloupnost funkcí z $\mathcal{C}_c(X)$ a $f_j \searrow 0$, potom $Af_j \to 0$.*

Tvrzení plyne z (c), neboť platí *Diniho věta*, podle níž za této situace $f_j \to 0$ stejnoměrně.

18.4. Vnější míra přiřazená Radonovu integrálu. Nechť X je lokálně kompaktní σ-kompaktní metrický prostor a A je Radonův integrál na X. Zavedeme množinovou funkci $\tau = \tau_A$ na systému $\mathcal{G}$ všech otevřených podmnožin X předpisem

$$\tau(G) = \sup\{Af : f \in \mathcal{C}_c(X),\ 0 \leq f \leq 1,\ \operatorname{spt} f \subset G\}. \tag{18.1}$$

Dále v duchu základní konstrukce 8.6 vytvořme vnější míru $\tau^* = \tau_A^*$ a míru $(\mathcal{G}', \tau_A')$. Nyní je třeba dokázat celou řadu tvrzení.

(a) *Jestliže* $f \in \mathcal{C}_c(X)$, *platí*

$$0 \le f \le \chi_G \implies Af \le \tau(G). \tag{18.2}$$

Důkaz (18.2) dostaneme následovně: Nechť

$$f_j = (f - 1/j)^+$$

Potom

$$\operatorname{spt} f_j \subset \operatorname{spt} f \cap G$$

a $f_j \to f$ stejnoměrně. Tudíž podle 18.3(c)

$$Af = \lim Af_j \le \gamma(G).$$

(b) *Nechť* G_1, G_2 *jsou otevřené množiny a* $G = G_1 \cup G_2$. *Potom*

$$\tau(G) \le \tau(G_1) + \tau(G_2) \tag{18.3}$$

Nechť $f \in \mathcal{C}_c(X)$, $0 \le f \le 1$ a $\operatorname{spt} f \subset G$. Definujme

$$g_i(x) = \operatorname{dist}(x, X \setminus G_i),$$

$$f_i = \begin{cases} \frac{fg_i}{g_1+g_2}, & x \in G_1 \cup G_2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $f_i \in \mathcal{C}_c(X)$, $0 \le f_i \le \chi_{G_i}$ a $f = f_1 + f_2$. Tedy s pomocí (a)

$$A(f) = A(f_1) + A(f_2) \le \tau(G_1) + \tau(G_2).$$

Přechodem k supremu přes f dostaneme

$$\tau(G) \le \tau(G_1) + \tau(G_2).$$

(c) *Je-li* $\{G_j\}$ *posloupnost otevřených množin, potom*

$$\tau\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j). \tag{18.4}$$

Nechť $f \in \mathcal{C}_c(X)$, $0 \le f \le 1$ a

$$\operatorname{spt} f \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j,$$

potom k pokrytí kompaktní množiny $\operatorname{spt} f$ stačí konečně mnoho z množin G_j. Tedy podobně jako v (b)

$$A(f) \le \sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j)$$

a přechodem k supremu přes f dostaneme (18.4).

(d) *Pro každou množinu* $E \subset X$ *je*

$$\tau^*(E) = \inf\Big\{\tau(G) : \ G \text{ otevřená}, G \supset E\Big\}.$$

To je zřejmým důsledkem (c).

(e) *Jestliže* $K \subset X$ *je kompaktní,* $f \in \mathcal{C}_K(X)$ *a* $0 \le f \le 1$, *potom* $Af \le \tau^*(K)$.

Stačí si uvědomit, že pro každou otevřenou množinu $G \supset K$ je $Af \le \tau(G)$.

(f) *Pro každou otevřenou množinu* G *platí*

$$\tau(G) = \sup\{\tau^*(K) : \ K \text{ kompaktní}, K \subset G\}. \tag{18.5}$$

Jestliže $f \in \mathcal{C}_c(X)$, $0 \le f \le 1$ a $\operatorname{spt} f \subset G$, potom podle (e)

$$Af \le \tau^*(\operatorname{spt} f) \le \sup\{\tau^*(K) : \ K \text{ kompaktní}, K \subset G\}.$$

Nyní stačí přejít k supremu přes f.

(g) *Jsou-li* $G_i \subset X$, $i = 1, 2$, *disjunktní otevřené množiny, potom*

$$\tau(G_1) + \tau(G_2) \le \tau(G_1 \cup G_2).$$

To je zřejmé z definice.

(h) *Je-li* $U \subset X$ *otevřená a jsou-li* $K_i \subset U$, $i = 1, 2$, *disjunktní kompaktní množiny, potom*

$$\tau^*(K_1) + \tau^*(K_2) \le \tau(U).$$

K tomuto účelu stačí najít podle 18.2(d) disjunktní otevřené množiny G_i tak, že $G_i \supset K_i$ a uvědomit si s použitím (g), že

$$\tau^*(K_1) + \tau^*(K_2) \le \tau(G_1 \cap U) + \tau(G_2 \cap U) \le \tau(U)$$

(i) *Jsou-li $G \subset U \subset X$ otevřené, $K \subset U \setminus G$ kompaktní, potom*

$$\tau^*(K) + \tau(G) \le \tau(U).$$

Pro každou kompaktní množinu $K' \subset G$ máme totiž podle (h)

$$\tau^*(K) + \tau^*(K') \le \tau(U),$$

a přejdeme-li k supremu přes K', dostaneme podle (18.5) požadované.

(j) *Jsou-li U, $G \subset X$ otevřené, potom*

$$\tau^*(G \setminus U) + \tau(G \cap U) \le \tau(G). \tag{18.6}$$

Vskutku: nechť $K \subset G \cap U$ je kompaktní. Potom podle předchozího kroku máme

$$\tau^*(K) + \tau^*(G \setminus U) \le \tau^*(K) + \tau(G \setminus K) \le \tau(G).$$

Přechodem k supremu přes K podle (18.5) dostaneme požadované.

(k) *Nechť $U \subset X$ je otevřená množina a $T \subset X$ je libovolná. Potom*

$$\tau^*(T \setminus U) + \tau^*(T \cap U) \le \tau^*(T). \tag{18.7}$$

Nechť $G \supset T$ je otevřená. Z (18.6) dostaneme, že

$$\tau^*(T \setminus U) + \tau^*(T \cap U) \le \tau^*(G \setminus U) + \tau(G \cap U) \le \tau(G)$$

a přechodem k infimu přes G dostaneme (18.7).

(l) *Nechť $G \subset X$ je otevřená, $g \in C_c(X$ je nezáporná, $g \ge 1$ na G. Potom $\tau(G) \le Ag$.*

Nechť $f \in \mathcal{C}_c(X)$, $0 \le f \le 1$ a $\operatorname{spt} f \subset G$. Potom z monotonie A plyne $Af \le Ag$. Přechodem k supremu přes f dostáváme $\tau(G) \le Ag$.

(m) *Je-li $K \subset X$ kompaktní, pak $\tau^*(K) < \infty$.*

Podle 18.2(a) existuje $G \supset K$ otevřená tak, že $\overline{G}$ je kompaktní, Využijeme 18.2(c) k sestrojení $g \in C_c(X)$ s vlastnostmi $0 \le g \le 1$ a $g = 1$ na $\overline{G}$. Podle (l) je

$$\tau^*(K) \le \tau(G) \le Ag.$$

18.5. Radonovy míry. Nechť X je σ-kompaktní lokálně kompaktní prostor. Nechť $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožin X. Míra μ na $(X, \mathcal{S})$ se nazývá *Radonova míra*, jestliže

(Ra-1) $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{S}$,
(Ra-2) $\mu(E) = \inf\{\mu(G) : G \text{ otevřená}, G \supset E\}$ pro každou $E \in \mathcal{S}$,
(Ra-3) $\mu(K) < \infty$ pro každou kompaktní $K \subset X$.

Obecná znaménková míra $\nu : \mathcal{I} \to \mathbf{R}$ na $\mathcal{S}$ se nazývá *Radonova obecná znaménková míra*, jestliže ν^+ a ν^- jsou Radonovy míry a $\mathcal{I} = \{E \in \mathcal{S} : |\nu(E)| < \infty\}$. V dalším nás budou především zajímat úplné Radonovy míry, což není nic jiného, než Radonovy míry, které jsou úplné. Každou Radonovu míru lze převést na úplnou Radonovu míru zúplněním (viz. 1.12). Znaménkovou Radonovu míru nazýváme úplnou, je-li její variace úplná.

18.6. Příklady. Lebesgueova míra na $\mathfrak{M}(\mathbf{R}^n)$ je úplná Radonova míra. Diracova míra na 2^X je úplná Radonova míra.

18.7. Rieszova věta o reprezentaci. *Nechť X je lokálně kompaktní σ-kompaktní metrický prostor.*

(a) *Nechť A je nezáporný lineární funkcionál na $\mathcal{C}_c(X)$. Potom existuje právě jedna úplná Radonova míra μ na X tak, že*

$$A(f) = \int_X f\,d\mu \tag{18.8}$$

pro všechna $f \in \mathcal{C}_c(X)$.

(b) *Nechť A je spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{C}_c(X)$. Potom existuje právě jedna úplná Radonova obecná znaménková míra ν na X tak, že*

$$A(f) = \int_X f\,d\nu$$

(viz. 15.8) pro všechna $f \in \mathcal{C}_c(X)$.

Důkaz. (a) Existence. Položme $\mu = \tau'_A$, kde τ_A, τ' jsou definovány jako ve 18.4. Potom μ je úplná míra. Podle 18.4(k) je každá otevřená množina $U \subset X$ τ^*-měřitelná. Jelikož borelovská σ-algebra je generovaná otevřenými množinami, je každá borelovská množina v $\mathfrak{M}(\tau^*)$, což je (Ra-1). Vlastnost (Ra-2) je důsledkem (18.1). Nechť $K \subset X$ je kompaktní. Potom K je borelovská, tudíž τ^*-měřitelná, a podle 18.4(m) je $\mu(K) = \tau^*(K) < \infty$. Tím máme (Ra-3) a víme, že μ je Radonova míra. Nechť $f \in C_c(X)$ je nezáporná, a k, j jsou celá čísla. Označme

$$f_j = \min\{f, j2^{-k}\}, \quad g_j = 2^k(f_j - f_{j-1}).$$

(Z estetických důvodů nevyznačujeme závislost těchto funkcí na k.) Potom pro $j \geq 1$ je $0 \leq g_j \leq 1$,

$$\{f > j2^{-k}\} \subset \{g_j \geq 1\}, \qquad \{g_j > 0\} \subset \{f > (j-1)2^{-k}\}$$

a podle 18.4(a) a 18.4(l)

$$\mu(\{f > j2^{-k}\}) \leq Ag_j \leq \mu(\{f > (j-1)2^{-k}\}) \tag{18.9}$$

neboli

$$\mu(\{f > j2^{-k}\}) \leq 2^k(Af_j - Af_{j-1}) \leq \mu(\{f > (j-1)2^{-k}\}).$$

Vynásobíme-li 2^{-k} a sečteme-li přes $j = 1, 2, \ldots$, dostaneme

$$2^{-k}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(\{f > j2^{-k}\}) \leq Af \leq 2^{-k}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(\{f > (j-1)2^{-k}\})$$

Odečteme levou stranu a získáme

$$0 \leq 2^{-k}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(\{f > j2^{-k}\}) - Af \leq 2^{-k}\mu(\{f > 0\}).$$

Jelikož f má kompaktní nosič, podle 18.4(m) je $\mu(\{f > 0\}) < \infty$ a dostáváme

$$Af = \lim_{k\to\infty} 2^{-k}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(\{f > j2^{-k}\}). \tag{18.10}$$

Jelikož kromě (18.9) také platí

$$\mu(\{f > j2^{-k}\}) \leq \int_X g_j\, d\mu \leq \mu(\{f > (j-1)2^{-k}\}),$$

stejným způsobem jako jsme upravovali (18.9) odvodíme

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} 2^{-k}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(\{f > j2^{-k}\}). \tag{18.11}$$

Z (18.10) a (18.11) dostáváme (18.8). Pokud $f \in \mathcal{C}_c(X)$ není nezáporná, můžeme ji rozložit na kladnou a zápornou část.

Důkaz jednoznačnosti. Nechť $(X, \mathcal{S}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ jsou úplné Radonovy míry splňující (18.8). Nechť $G \subset X$ je otevřená. Potom podle 18.2(f) existuje posloupnost $\{f_j\}$ funkcí z $C_c(X)$ tak, že $0 \leq f_j \leq 1$, $\operatorname{spt} f_j \subset G$ a $f_j \nearrow \chi_G$. Podle Leviho věty 3.8

$$\lim_{j\to\infty} Af_j = \lim_{j\to\infty}\int_X f_j\, d\mu_i = \mu_i(G),$$

tedy μ_i se shodují na otevřených množinách. Je-li množina $N \subset X$ μ_1-nulová, podle (Ra-2) existuje posloupnost $\{U_j\}$ otevřených množin tak, že $N \subset U_j$ a $\mu_1(U_j) \to 0$. Pak $V := \bigcap_j U_j$ je borelovská množina, tudíž $V \in \mathcal{S}$ a $\mu_2(V) = 0$. Tím pádem z úplnosti také $N \in \mathcal{S}$ a $\mu_2(N) = 0$. Zjistili jsme, že μ_1 a μ_2 mají stejné nulové množiny. Nechť nyní E je μ_1-měřitelná, $\mu_1(E) < \infty$. Potom zase existuje posloupnost $\{G_j\}$ otevřených množin tak, že $E \subset G_j$ a $\mu_1(G_j) \to \mu_1(E)$. Buď $D := \bigcap G_j$. Potom $E = D \setminus (D \setminus E)$, kde D je borelovská a $D \setminus E$ je μ_1 nulová, tudíž také μ_2-nulová. Tedy E je μ_2-měřitelná. Je-li E obecná μ_1-měřitelná množina, pak si vzpomeneme, že $X = \bigcup X_j$, kde X_j jsou kompaktní, tedy $X_j \cap E$ jsou μ_1-měřitelné, $\mu_1(X_j \cap E) < \mu_1(X_j) < \infty$. Tedy podle předchozího jsou $X_j \cap E$ také μ_2-měřitelné, tedy nakonec E je μ_2-měřitelná. Máme $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ a vzorec (18.1) dává rovnost $\mu_1 = \mu_2$.

(b) Důkaz existence. Je-li $f \in \mathcal{C}_c(X)$ nezáporná, položme

$$|A|(f) := \sup\{Ag : \ g \in \mathcal{C}_c(X),\ |g| \leq f\}.$$

Jinak buď

$$|A|(f) := |A|(f^+) - |A|(f^-).$$

Chceme ukázat, že $|A|$ je Radonův integrál. Nechť $f_1,\ f_2 \in \mathcal{C}_c(X)$ jsou nezáporné a $f = f_1 + f_2$. Nechť $g \in \mathcal{C}_c(X)$, $|g| \geq f$. Položme

$$g_i = \begin{cases} \frac{f_i g}{f} & \text{na } \{f \neq 0\}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $g_i \in \mathcal{C}_c(X)$, $i = 1, 2$, a $|g_i| \leq f_i$. Máme

$$A(g) = A(g_1) + A(g_2) \leq |A|(f_1) + |A|(f_2)$$

a přechod k supremu přes g dává

$$|A|(f) \leq |A|(f_1) + |A|(f_2).$$

Tím máme additivitu na nezáporných funkcích, dokončení důkazu linearity ponecháme na čtenáři. Máme

$$A = A^+ - A^-, \quad \text{kde } A^+ = \frac{|A| + A}{2}, \quad A^- = \frac{|A| - A}{2}$$

jsou nezáporné lineární funkcionály. Podle části (a) najdeme míry ν^+ reprezentující A^+, ν^- reprezentující A^- a definujeme

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

Snadno se ověří, že ν má žádané vlastnosti.

Důkaz jednoznačnosti. Mějme míry ν_1 a ν_2 vyhovující požadavkům. Potom pro každou $f \in \mathcal{C}_c(X)$ máme

$$\int_X f\, d(\nu_1^+ + \nu_2^-) = \int_X f\, d(\nu_1^- + \nu_2^+),$$

takže podle výsledku o jednoznačnosti pro nezáporné míry dostáváme

$$\nu_1^+ + \nu_2^- = \nu_1^- + \nu_2^+.$$

Tím je důkaz hotov. □

19. Věty o aproximaci

Nechť X je σ-kompaktní lokálně kompaktní prostor a μ je Radonova míra na $(X, \mathcal{S})$.

19.1. Věta o hustotě spojitých funkcí v L^p. *Nechť $1 \leq p < \infty$. Potom $\mathcal{C}_c(X)$ je hustá v $L^p(X)$.*

Důkaz. Nechť nejprve $G \subset X$ je otevřená množina konečné míry. Podle 18.2(f) existuje posloupnost $\{f_j\}$ funkcí z $\mathcal{C}_c(X)$ tak, že $0 \leq f_j \leq 1$, $\operatorname{spt} f_j \subset G$ a $f_j \nearrow \chi_G$. Podle Lebesgueovy věty 5.2 je

$$\|f_j - \chi_G\|_p \to 0.$$

Je-li $E \in \mathcal{S}$ konečné míry, podle (Ra-2) existuje posloupnost $\{G_j\}$ otevřených množin konečné míry tak, že $G_j \supset E$ a

$$\mu(G_j) \to \mu(E).$$

Potom zase

$$\|\chi_{G_j} - \chi_E\|_p \to 0.$$

Ukázali jsme, že v L^p-uzávěru $\mathcal{C}_c(X)$ leží charakteristické funkce měřitelných množin konečné míry. Odtud snadno přejdeme k jednoduchým funkcím a věta 7.7 ukazuje, že L^p-uzávěr $\mathcal{C}_c(X)$ je celé $L^p(X)$. □

19.2. Poznámka. Věta 19.1 neplatí pro $p = \infty$, jako protipříklady mohou sloužit charakteristické funkce omezených intervalů na $\mathbf{R}$.

19.3. Luzinova věta. *Nechť f je μ-měřitelná funkce na X a $\varepsilon > 0$. Potom existuje spojitá funkce g na X tak, že*

$$\mu(\{f \neq g\}) < \varepsilon.$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že X má konečnou míru a f je omezená. Potom $f \in L^1(X)$ a tudíž podle věty 19.1 existuje posloupnost $\{f_j\}$ funkcí z $\mathcal{C}_c(X)$ tak, že

$$\|f_j - f\|_1 \to 0.$$

Můžeme předpokládat, že

$$\|f_j - f\|_1 < 4^{-j}\varepsilon.$$

Položme

$$g_j = f_{j+1} - f_j,$$

$$\overline{g}_j = \begin{cases} g_j, & \text{na } \{|g_j| \le 2^{-j}\}, \\ 2^{-j} & \text{na } \{g_j > 2^{-j}\}, \\ -2^{-j} & \text{na } \{g_j < -2^{-j}\}, \end{cases}$$

$$g = f_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{g}_j.$$

Potom g je součet stejnoměrně konvergentní řady a tudíž spojitá funkce. Podle Čebyševovy nerovnosti 14.1 je

$$\mu(\{\overline{g}_j \neq g_j\}) = \mu(\{|g_j| > 2^{-j}\}) \le 2^j\varepsilon\|g_j\|_1 \le 2^{-j}\varepsilon,$$

tedy

$$\mu(\{f \neq g\}) < \varepsilon.$$

Případ, že f je neomezená, převedeme na předchozí. Nechť

$$E_k = \{|f| > k\}, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Potom

$$\lim_k \mu(E_k) = \mu\Big(\bigcup_k E_k\Big) = 0,$$

a tudíž najdeme k tak, že $\mu(E_k) < \varepsilon/2$. Nyní stačí aproximovat funkci $f\chi_{E_k}$. Případ, kdy prostor X má nekonečnou míru, se převede na předchozí pomocí tzv. rozkladu jednotky. Podrobnosti zde nebudeme uvádět. □

Nyní se přeneseme do eukleidovského prostoru. Je-li $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ měřitelná množina, symbolem $L^p(\Omega)$ budeme značit prostor všech L^p-funkcí vzhledem k míře

$$E \mapsto \lambda(E), \qquad E \in \mathfrak{M}(\mathbf{R}^n),\ E \subset \Omega.$$

19.4. Nosič funkce. Zhlazovací jádro. Konvoluce. Je-li f spojitá funkce na otevřené podmnožině $\mathbf{R}^n$, označme

$$\operatorname{spt} f = \overline{\{f \neq 0\}}.$$

Množina $\operatorname{spt} f$ se nazývá *nosič* funkce f.

Uvažujme funkci

$$\varrho(t) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}), & t > 0, \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$$

o níž je známo, že je nekonečně diferencovatelná. Položme

$$\phi(x) = \kappa\, \varrho(1 - |x|^2),$$

kde $\kappa > 0$ je voleno tak, aby platilo

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)\, dx = 1. \tag{19.1}$$

Potom ϕ lze napsat jako složení dvou nekonečně diferencovatelných funkcí a tudíž je nekonečně diferencovatelná. Jejím nosičem je jednotková koule $B(0,1)$. Funkce ϕ se nazývá *zhlazovací jádro*, protože se používá k aproximaci funkcí hladkými funkcemi. Pro $\delta > 0$ značíme

$$\phi_\delta(x) = \delta^{-n}\phi(\tfrac{x}{\delta}).$$

Je-li Ω otevřená množina a $\rho > 0$, budeme značit

$$\Omega_\rho = \{x : B(x.\rho) \subset \Omega\}.$$

Nechť $0 < \delta < \rho$ a f je lokálně integrovatelná funkce na Ω. Pak značíme $\phi_\delta * f$ *konvoluci* funkcí ϕ_δ a f definovanou předpisem

$$\phi_\delta * f(x) = \int_{B(0,\delta)} f(x-\xi)\,\phi_\delta(\xi)\,d\xi. \tag{19.2}$$

19.5. Věta o aproximaci v spojitých a spojitě diferencovatelných funkcích. *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $\rho > 0$. Nechť $K \subset \Omega_\rho$ je kompaktní množina. Nechť u je spojitá funkce na Ω a $0 < \delta < \rho$. Potom $\phi_\delta * u$ je nekonečně diferencovatelná funkce na Ω_ρ a platí*

(a) *$\phi_\delta * u \rightrightarrows u$ na K,*
(b) *pokud u je spojitě diferencovatelná, pak také $\nabla(\phi_\delta * u) \rightrightarrows \nabla u$ na K.*

($\rightrightarrows$ je znak pro stejnoměrnou konvergenci, rozumí se konvergence pro $\delta \to 0+$).

Důkaz. Důkaz je založen na obecné metodě zhlazování konvolucí, srov. [LM], [DIPP]. Dodefinujme u nulou vně Ω, potom konvoluce $\phi_\delta * u$ dává smysl pro $x \in \mathbf{R}^n$ a obor integrace v (19.2) můžeme také rozšířit na $\mathbf{R}^n$.

Označme

$$u_\delta = \phi_\delta * u.$$

Substituce $\xi = \delta y$ dává

$$u_\delta(x) = \int_{\mathbf{R}^n} u(x-\delta y)\,\phi(y)\,dy. \tag{19.3}$$

Substitucí $\xi = x - z$ dostaneme

$$u_\delta(x) = \int_{\mathbf{R}^n} u(z)\phi_\delta(x-z)\,dz = \delta^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} u(z)\,\phi(\frac{x-z}{\delta})\,dz. \tag{19.4}$$

Derivováním podle parametru podle věty 6.4 (konstantní majoranta stačí) dostaneme z (19.3)

$$D_i u_\delta(x) = \int_{\mathbf{R}^n} D_i u(x-\delta y)\,\phi(y)\,dy. \tag{19.5}$$

kde D_i je operátor derivování podle i-té proměnné. Analogicky z (19.4)

$$D_i u_\delta(x) = \int_{\mathbf{R}^n} u(z)\,D_i\phi(\frac{x-z}{\delta})\,dz. \tag{19.6}$$

Pokračujeme-li rekurentně v derivování (19.4), (19.6), ..., dostaneme, že funkce u_δ je nekonečně diferencovatelná. Nechť

$$K' = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,K) \le \rho\}.$$

Potom K' je kompaktní podmnožina Ω. K danému $\varepsilon > 0$ najdeme ze stejnoměrné spojitosti na K' takové $\delta \in (0,\rho)$, že

$$x, x' \in K',\ |x'-x| < \delta,\ i \in \{1,\dots,n\} \implies |u(x') - u(x)| < \varepsilon, \quad \text{příp. } |D_i u(x') - D_i u(x)| < \varepsilon.$$

Potom pro $x \in K$ a $y \in \mathbf{R}^n$ je buď $|y| \ge 1$, ale pak $\phi(y) = 0$, anebo $|y| < 1$, ale pak $x' := x - \delta y \in K'$ a $|x'-x| < \delta$. Potom

$$\big|u(x-\delta y) - u(x)\big|\,\phi(y) < \varepsilon\phi(y)$$

a tudíž podle (19.5) a (19.1)

$$\begin{aligned}|u_\delta(x) - u(x)| &= \Big|\int_{\mathbf{R}^n} u(x-\delta y)\,\phi(y)\,dy - u(x)\int_{\mathbf{R}^n}\phi(y)\,dy\Big| \\ &= \int_{\mathbf{R}^n}\big|u(x-\delta y) - u(x)\big|\,\phi(y)\,dy \le \varepsilon\int_{\mathbf{R}^n}\phi(y)\,dy = \varepsilon.\end{aligned}$$

Podobně bychom dostali $|D_i u_\delta(x) - D_i u(x)| < \varepsilon$ v případě spojitosti $D_i u$. □

19.6. Věta o aproximaci v L^p. *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $1 \le p < \infty$. Potom množina všech nekonečně diferencovatelných funkcí z $\mathcal{C}_c(\Omega)$ je hustá v $L^p(\Omega)$.*

Důkaz. Nechť $u \in L^p(\Omega)$ a $\varepsilon > 0$ Podle věty 19.1 existuje $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tak, že $\|f - u\|_p < \varepsilon$. Buď K nosič funkce f. Najdeme $\rho > 0$ tak, že $K' \subset \Omega_\rho$, kde

$$K' = \{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) \le \rho\}.$$

Podle věty 19.5 existuje $\delta \in (0, \rho)$ tak, že

$$|\phi_\delta * f(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in K'.$$

Zřejmě

$$\phi_\delta * f(x) = 0 = f(x) \qquad \forall\, x \notin K'.$$

Máme

$$\|\phi_\delta * f - f\|_p \le \Big(\int_{K'} \varepsilon^p \, dx\Big)^{1/p} = \varepsilon\, (\lambda(K'))^{1/p}.$$

Tedy z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\|\phi_\delta * f - u\|_p \le \|\phi_\delta * f - f\|_p + \|f - u\|_p \le \Big(1 + (\lambda(K))^{1/p}\Big)\, \varepsilon.$$

□

19.7. Poznámka. Věta 19.6 neplatí pro $p = \infty$, jako protipříklady mohou sloužit charakteristické funkce omezených intervalů na $\mathbf{R}$.

Kapitolu uzavřeme dvěma větami, které jsme (stejně jako větu 19.5) potřebovali při důkazu Stokesovy věty.

19.8. Věta o rozkladu jednotky. *Nechť $\mathcal{U}$ je systém otevřených podmnožin $\mathbf{R}^n$ pokrývající kompaktní množinu $K \subset \mathbf{R}^n$. Potom existují nekonečně diferencovatelné funkce $\omega_q : \mathbf{R}^n \to [0,1]$, $q = 1, \dots, m$, tak, že*

$$\sum_q \omega_q = 1 \ \text{na} \ K \tag{19.7}$$

a každá ω_q má nosič obsažený v některé z množin $U \in \mathcal{U}$.

Důkaz. Ke každému bodu $x \in K$ najděme kouli B_x se středem v x tak, že $\overline{B}_x \subset U$ pro některou $U \in \mathcal{U}$. Z koulí B_x vybereme konečné podpokrytí

$$B(x_1, r_1), \dots B(x_m, r_m)$$

kompaktu K. Položme

$$G = \bigcup_{q=1}^m B(x_q, r_q).$$

Potom G je otevřená množina. Ke každému bodu hranice $x \in \partial G$ přiřadíme kouli B'_x se středem v x tak, že $\overline{B}'_x \subset U \setminus K$ pro některou $U \in \mathcal{U}$. Z koulí B'_x vybereme konečné podpokrytí

$$B(x_{m+1}, r_{m+1}), \dots B(x_p, r_p)$$

kompaktu ∂G. Nechť ϕ je zhlazovací jádro z 19.4. Položme

$$\phi_q(x) = \phi\Big(\frac{x - x_q}{r_q}\Big),$$

$$\sigma(x) = \sum_{q=1}^p \phi_q(x)$$

a pro $q = 1, \dots, m$

$$\omega_q(x) = \begin{cases} \frac{\phi_q(x)}{\sigma(x)}, & \text{když } \sigma(x) > 0, \\ 0, & \text{když } \sigma(x) = 0. \end{cases}$$

Označme

$$G' = \bigcup_{q=1}^p B(x_q, r_q)$$

Potom ω_q je nekonečně diferencovatelná na G', protože $\sigma > 0$ na G', a také na $\mathbf{R}^n \setminus \overline{G}$, neboť tam je identicky nulová. Jelikož sjednocením těchto dvou otevřených množin je celé $\mathbf{R}^n$, je ω_q nekonečně diferencovatelná na $\mathbf{R}^n$. Pro $x \in K$ dostaneme

$$\sum_{q=1}^{m} \omega_q(x) = \frac{\sum_{q=1}^{m} \phi_q(x)}{\sum_{q=1}^{p} \phi_q(x)} = 1,$$

neboť všechny funkce $\phi_{m+1}, \ldots \phi_p$ jsou na K nulové. □

19.9. Důsledek o oddělování množin. *Nechť $U \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $K \subset U$ je kompaktní. Potom existuje nekonečně diferencovatelná funkce $\omega : \mathbf{R}^n \to [0,1]$ tak, že $\operatorname{spt} \omega \subset U$ a $\omega = 1$ na K.*

Důkaz. Stačí použít větu 19.8 na $\mathcal{G} = \{U\}$. □

20. Měřitelná zobrazení a obraz míry

20.1. Měřitelné zobrazení. Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory. Řekneme, že f je *měřitelné zobrazení* $(X, \mathcal{S})$ do $(Y, \mathcal{T})$, jestliže pro každou $E \in \mathcal{T}$ je $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$.

Uvědomme si, že měřitelná funkce je měřitelné zobrazení do $(\overline{\mathbf{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}))$. Bylo by závažnou chybou se domnívat, že konečná měřitelná funkce je měřitelné zobrazení do $(\mathbf{R}, \mathfrak{M})$.

20.2. Skládání měřitelných zobrazení. *Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$, $(Z, \mathcal{U})$ jsou měřitelné prostory, f je měřitelné zobrazení $(X, \mathcal{S})$ do $(Y, \mathcal{T})$ a g je měřitelné zobrazení $(Y, \mathcal{T})$ do $(Z, \mathcal{U})$. Potom $g \circ f$ je měřitelné zobrazení $(X, \mathcal{S})$ do $(Z, \mathcal{U})$.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý. □

20.3. Obraz míry. Nechť $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory, μ je míra na $(X, \mathcal{S})$ a f je měřitelné zobrazení $(X, \mathcal{S})$ do $(Y, \mathcal{T})$. Potom množinová funkce

$$f(\mu) : E \mapsto \mu(f^{-1}(E)), \qquad E \in \mathcal{T}$$

se nazývá *obraz míry μ*.

Obraz míry je zřejmě míra.

20.4. Příklad. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbf{R}^n$ je difeomorfismus. Nechť μ je borelovská míra na G s hustotou $|Jf|$ (Jf je jakobián funkce f). Potom pro každou borelovskou množinu $M \subset f(G)$ je

$$f(\mu)(M) = \lambda(M).$$

20.5. Věta o obrazu míry. *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou, f je měřitelné zobrazení $(X, \mathcal{S})$ do $(Y, \mathcal{T})$ a $\nu = f(\mu)$. Potom pro každou $\mathcal{T}$-měřitelnou funkci u na Y je*

$$\int_Y u(y)\, d\nu(y) = \int_X u(f(x))\, d\mu(x)$$

pokud aspoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Důkaz je rutinní záležitost (přes charakteristické funkce, jednoduché funkce, ...). □

21. Lebesgue-Stieltjesovy míry a distribuční funkce

21.1. Neklesající funkce. Nechť $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je neklesající funkce. Potom F má v každém bodě $x \in \mathbf{R}$ jednostranné limity

$$F(x+) := \lim_{y \to x+} F(y), \qquad F(x-) := \lim_{y \to x-} F(y)$$

a v nevlastních bodech jednostranné limity

$$F(-\infty+) := \lim_{y \to -\infty+} F(y), \qquad F(+\infty-) := \lim_{y \to \infty-} F(y)$$

Množinu bodů nespojitosti ("skoků") funkce F značíme S_F. Je

$$S_F = \{x \in \mathbf{R} : \ F(x-) < F(x+)\}.$$

Množina S_F je (nejvýš) spočetná.

21.2. Lebesgue-Stieltjesova míra. Radonovy míry na $\mathbf{R}$ se nazývají *Lebesgue-Stieltjesovy míry.*

Řekneme, že Lebesgue-Stieltjesova míra μ je *indukovaná* neklesající funkcí F, (značíme $\mu = \mu_F$), jestliže

$$-\infty < a < b < \infty \implies F(b+) - F(a+) = \mu\big((a,b]\big). \tag{21.1}$$

Pokud F je zprava spojitá, můžeme v (21.1) nahradit jednostranné limity funkčními hodnotami.

21.3. Z funkce uděláme míru. *Nechť $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je neklesající funkce. Potom existuje právě jedna Lebesgue-Stieltjesova míra μ na $\mathbf{R}$ tak, že platí* (21.1). *Přitom*

$$\mu(\mathbf{R}) = F(+\infty-) - F(-\infty+).$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{I}_+$ je systém všech konečných po dvou disjunktních sjednocení intervalů typu $(a,b]$ v $\mathbf{R}$. Potom $\mathcal{I}_+$ je okruh a "snadno" nahlédneme, že existuje právě jedna pramíra π na $\mathcal{I}_+$ tak, že

$$-\infty < a < b < \infty \implies \pi\big((a,b]\big) = F(b+) - F(a+).$$

(Intuitivně je to opravdu zřejmé. Formální důkaz vyžaduje nudné ověření, že pokud lze množinu napsat dvěma způsoby jako disjunktní sjednocení polouzavřených intervalů, pak součty "přírůstků" funkce F jsou stejné.) Podle Hopfovy věty 8.13 existuje právě jedna borelovská míra μ, která rozšiřuje π. Tato (a jedině tato) míra má požadované vlastnosti. $\square$

21.4. K míře najdeme funkci. *Nechť μ je Lebesgue-Stieltjesova míra na $\mathbf{R}$. Potom existuje zprava spojitá neklesající funkce F tak, že platí*

$$-\infty < a < b < \infty \implies \mu\big((a,b]\big) = F(b) - F(a). \tag{21.2}$$

Jsou-li F_1, F_2 zprava spojité neklesající funkce splňující (21.2), *potom F_1 a F_2 se liší o konstantu.*

Důkaz. Zvolíme $F(0)$ a další funkční hodnoty dopočítáme z (21.2), kde volíme $(a,b] = (0,x]$ pro $x > 0$, $(a,b] = (x,0]$ pro $x < 0$. $\square$

21.5. Neklesající funkce absolutně spojité, singulární spojité a funkce skoků. Podle věty 21.3 každá omezená neklesající funkce F indukuje Lebesgue-Stieltjesovu míru μ_F. Řekneme, že F je

- *absolutně spojitá*, je-li $\mu_F << \lambda$,
- *singulární*, je-li $\mu_F - \lambda$,
- *funkce skoků*, je-li μ_F diskrétní.

Omezenost funkce F jsme předpokládali jen z terminologických důvodů. Kdyby F byla neomezená, bylo by v prvém případě přesnější používat termín "lokálně absolutně spojitá".

21.6. Rozklad omezené neklesající funkce. Mějme omezenou neklesající funkci $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a indukovanou Lebesgue-Stieltjesovu míru $\mu = \mu_F$. Potom μ lze podle vět 17.3 a 17.9 rozdělit

$$\mu = \mu_a + \mu_{cs} + \mu_d,$$

kde $\mu_a << \lambda$, $\mu_{cs} - \lambda$, $\mu_d - \lambda$, μ_{cs} je spojitá a μ_d je diskrétní. Tomu odpovídají funkce

$$\begin{aligned} F_a(x) &:= \mu_a((-\infty, x]), \\ F_{cs}(x) &:= \mu_{cs}((-\infty, x]), \\ F_d(x) &:= \mu_d((-\infty, x]) - F(x+) + F(x). \end{aligned} \tag{21.3}$$

Funkce F_a je absolutně spojitá, F_{cs} je singulární spojitá, F_d je funkce skoků a

$$F(x) = F(-\infty+) + F_a(x) + F_{cs}(x) + F_d(x).$$

21.7. Náhodná veličina. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je *pravděpodobnostní prostor*, neboli prostor s pravděpodobnostní mírou. $\mathcal{A}$-měřitelná funkce $X : \Omega \to \mathbf{R}$ se bude nazývat *náhodná veličina.*

21.8. Distribuční funkce a rozdělení náhodné veličiny. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a X je náhodná veličina na Ω. Funkce

$$F(x) = P(\{X \le x\})$$

se nazývá *distribuční funkce* náhodné veličiny X a značí F_X. Míra $X(P)$ na $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ (obraz míry, viz. 20.3) se nazývá *rozdělení* náhodné veličiny X a značí μ_X; je to pravděpodobnostní Lebesgue-Stieltjesova míra.

21.9. Využití rozdělení náhodné veličiny. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina na Ω a $\mu = \mu_X$. Potom pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbf{R}$ je*

$$P(\{X \in E\}) = \mu(E).$$

Nechť $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je borelovská funkce. Potom

$$\int_\Omega \phi \circ X \, dP = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \, d\mu(x),$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Plyne z věty 20.5. □

21.10. Vlastnosti distribučních funkcí. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina na Ω a $F = F_X$. Potom*

(DF-1) *F je neklesající,*
(DF-2) *F je zprava spojitá a*
(DF-3) $F(-\infty+) = 0, \quad F(+\infty-) = 1.$

Důkaz. Důkaz je zřejmý. □

21.11. Charakterizace distribučních funkcí. Větu 21.10 můžeme obrátit. *Jestliže $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ splňuje* (DF-1)–(DF-3), *pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a náhodná veličina X na Ω tak, že F je distribuční funkce X.*

Důkaz. Uvažujme identickou funkci $X : x \mapsto x$ na pravděpodobnostním prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu_F)$. Podle věty 21.3 míra μ_F existuje, a zřejmě má požadované vlastnosti. □

21.12. Terminologická poznámka. Na základě vět 21.10 a 21.11 můžeme termín "distribuční funkce" používat pro funkci $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ splňující (DF-1)–(DF-3), aniž bychom měli na mysli nějakou konkrétní náhodnou veličinu, které by byla funkce F přiřazena.

21.13. K míře najdeme distribuční funkci. *Nechť μ je pravděpodobnostní Lebesgue-Stieltjesova míra na $\mathbf{R}$. Potom existuje právě jedna distribuční funkce F tak, že platí* (21.2). *(Srov. 21.4)*

Důkaz. Hledaná funkce je

$$F(x) = \mu((-\infty, x]).$$

□

21.14. Skoky a derivace distribuční funkce. Nechť F je distribuční funkce, $\mu = \mu_F$, μ_a je absolutně spojitá část μ_F a

$$f := \frac{d\mu_a}{d\lambda}.$$

Potom pro každý bod $x \in \mathbf{R}$ je

$$F(x) - F(x-) = \mu(\{x\})$$

(to je snadné), a

$$F' = f \text{ skoro všude}$$

(to je těžké, viz. [DIPP]).

21.15. Využití distribuční funkce náhodné veličiny. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina na Ω a $F = F_X$.*

(a) *Nechť F je absolutně spojitá. Potom pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbf{R}$ je*

$$P(\{X \in E\}) = \int_E F'(x) \, dx.$$

Nechť $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je borelovská funkce. Potom

$$\int_\Omega \phi \circ X \, dP = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \, F'(x) \, dx,$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

(b) *Nechť F je funkce skoků a S_F je množina skoků funkce F. Potom pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbf{R}$ je*

$$P(\{X \in E\}) = \sum_{x \in S_F \cap E} (F(x) - F(x-)).$$

Nechť $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je borelovská funkce. Potom

$$\int_\Omega \phi \circ X \, dP = \sum_{x \in S_F \cap E} \phi(x)(F(x) - F(x-)),$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Důkaz pomocí věty 21.9 je snadný, v případě (a) se však zprostředkovaně opírá o Radon-Nikodýmovu větu a netriviální tvrzení v 21.14. □

21.16. Příklady distribučních funkcí. Každá spojitě diferencovatelná distribuční funkce je příkladem absolutně spojité distribuční funkce, třeba

$$F(x) = 1/2 + \frac{1}{\pi} \arctan x.$$

Funkce $\chi_{[0,\infty)}$ je typická funkce skoků. Singulární spojité funkce se konstruují hůře, příkladem je tzv. Cantorova funkce, viz. [Vyb].

22. Gamma funkce

22.1. Zavedení Gamma a Beta funkce a rekurentní formule. Funkci *Gamma* definujeme na intervalu $(0, \infty)$ předpisem

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \, e^{-x} \, dx. \tag{22.1}$$

(Ověřte samostatně konvergenci integrálu!) Integrováním per partes zjistíme pro $s > 0$

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty x^s \, e^{-x} \, dx = \int_0^\infty s \, x^{s-1} \, e^{-x} \, dx = s \, \Gamma(s). \tag{22.2}$$

Funkci *Beta* dvou proměnných $p > 0$, $q > 0$ definujeme předpisem

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \, dx.$$

(Ověřte samostatně konvergenci integrálu!) Integrováním per partes odvodíme pro $p, q > 0$

$$pB(p, q+1) = \int_0^1 px^{p-1} (1-x)^q \, dx = \int_0^1 x^p \, q(1-x)^{q-1} \, dx = qB(p+1, q). \tag{22.3}$$

22.2. Derivování funkce Γ. Formálním derivováním za integračním znamením dostaneme rekurentně

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} (\ln x)^k \, e^{-x} \, dx.$$

Vzorec lze odůvodnit použitím věty o derivování podle parametru pro $s \in (p, q)$, kde $0 < p < q < \infty$, s majorantou

$$g(x) = (x^{p-1} + x^{q-1}) \, e^{-x}.$$

Funkce Gamma je tedy nekonečně diferencovatelná, tím spíš spojitá na $(0, \infty)$.

22.3. Průběh funkce Gamma. Zřejmě $\Gamma(s) > 0$ pro $s > 0$. Druhá derivace je zřejmě kladná, tedy Gamma je striktně konvexní na $(0, \infty)$. Máme

$$\int_0^\infty \lim_{s \to 0+} x^{s-1} \, e^{-x} \, dx = \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty$$

a tudíž podle věty 6.3 je

$$\lim_{s \to 0+} \Gamma(s) = \lim_{s \to 0+} \int_0^\infty x^{s-1} \, e^{-x} \, dx = +\infty.$$

Podobně se ukáže

$$\lim_{s \to \infty} \Gamma(s) = \int_0^\infty \lim_{s \to \infty+} x^{s-1} \, e^{-x} \, dx = \int_1^{+\infty} \infty = \infty.$$

22.4. Vztah funkcí Gamma a Beta. Substitucí $x = r^2$ získáme

$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty r^{2s-1}\, e^{-r^2}\, dr. \tag{22.4}$$

Substituce $x = \cos^2\alpha$ (tedy $1 - x = \sin^2\alpha$) dává

$$\mathrm{B}(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\alpha\, \sin^{2q-1}\alpha\, d\alpha.$$

Tedy použitím polárních souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\int_{\{x>0,\, y>0\}} x^{2p-1}y^{2q-1}\, e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy\\ &= 4\int_{\{r>0,\, 0<\alpha<\pi/2\}} r^{2p+2q-1}e^{-r^2}\cos^{2p-1}\alpha\, \sin^{2q-1}\alpha\, d\alpha\, dr\\ &= \Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q).\end{aligned}$$

22.5. Vyjádření funkce Gamma limitou. Označme

$$f_n(x) = x^{s-1}\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n \chi_{(0,n)}(x), \qquad x \in (0,\infty).$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^{s-1}e^{-x}, \qquad x \in (0,\infty).$$

Z nerovnosti

$$e^{-\frac{x}{n}} \geq 1 - \frac{x}{n} \geq 0, \qquad 0 < x < n$$

dostaneme umocněním na n-tou

$$0 \leq f_n(x) \leq x^{s-1}e^{-x},$$

což je integrovatelná funkce proměnné $x \in (0,\infty)$. Lebesgueova věta 5.2 dává

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\, dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n x^{s-1}\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n dx.$$

Substitucí $x = ny$ dostaneme

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^s y^{s-1}(1-y)^n\, dy = \lim_{n\to\infty} n^s\, B(s, n+1).$$

S pomocí (22.3) máme

$$\begin{aligned}n^s\, B(s,n+1) &= n^s\,\frac{n}{s}\,B(s+1,n) = n^s\,\frac{n(n-1)}{s(s+1)}\,B(s+2,n-1)\\ &= \ldots = n^s\,\frac{n!}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}\,B(s+n,1) = \frac{n^s\, n!}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}\int_0^1 x^{s+n-1}\, dx\\ &= \frac{n^s\, n!}{s(s+1)\ldots(s+n)}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^s\, n!}{s(s+1)\ldots(s+n)}. \tag{22.5}$$

22.6. Rozšíření definičního oboru funkce Γ. Funkci Γ můžeme definovat vzorcem (22.1) i pro komplexní hodnoty proměnné s, pokud $\mathrm{Re}(s) > 0$. Beze změn v důkazu dostaneme formule (22.3) i (22.5). Limita na pravé straně formule (22.5) však existuje pro "většinu" komplexních čísel s bez ohledu na znaménko $\mathrm{Re}(s)$. Přesněji, existuje pro každé komplexní číslo s s výjimkou nuly a záporných celých čísel. Vskutku, dokážeme indukcí podle k následující tvrzení:

Pro každé komplexní číslo $s \in \{z : \mathrm{Re}\, z > 1-k\} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}$ existuje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^s\, n!}{s(s+1)\ldots(s+n)}.$$

Pro $k=1$ použijeme odvození pomocí integrálního počtu jako v 22.5. Nechť $k>1$, tvrzení platí pro $k-1$ a s je komplexní číslo, jehož reálná část je větší než $1-k$. Potom $\operatorname{Re}(s+1)>2-k$ a podle indukčního předpokladu existuje

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{s+1}\,n!}{(s+1)\dots(s+1+n)}.$$

Tedy existuje také

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{s}\,n!}{s(s+1)\dots(s+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{s+1}\,n!}{(s+1)\dots(s+1+n)}\,\lim_{n\to\infty}\frac{s+1+n}{sn}=\frac{1}{s}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{s+1}\,n!}{(s+1)\dots(s+1+n)}.$$

Závěr je následující: definujeme-li funkci Γ limitou (22.5), její definiční obor je celá množina komplexních čísel s výjimkou nuly a záporných celých čísel. Pouze pro kladnou reálnou část však dostáváme integrální reprezentaci (22.1).

22.7. Objem koule v $\mathbf{R}^n$. Nechť $\alpha_n r^n$ je objem n-rozměrné koule o poloměru r v $\mathbf{R}^n$ a

$$I:=\int_{\mathbf{R}}e^{-x^2}\,dx.$$

Konstantu α_n určíme z výpočtu

$$\begin{aligned}
I^n&=\Big(\int_{\mathbf{R}}e^{-x^2}\,dx\Big)^n=\int_{\mathbf{R}}\Big(\int_{\mathbf{R}}\Big(\dots\Big(\int_{\mathbf{R}}e^{-x_1^2}e^{-x_2^2}\dots e^{-x_n^2}\,dx_n\Big)\dots\Big)\,dx_2\Big)dx_1\\
&=\int_{\mathbf{R}^n}e^{-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2}\,dx_1\,dx_2\,\dots\,dx_n=\int_{\mathbf{R}^n}e^{-|\boldsymbol{x}|^2}\,d\boldsymbol{x}\\
&=\int_{\mathbf{R}^n}\Big(\int_0^{e^{-|\boldsymbol{x}|^2}}dt\Big)\,d\boldsymbol{x}=\int_0^1\Big(\int_{\{\boldsymbol{x}:\,0<t<e^{-|\boldsymbol{x}|^2}\}}d\boldsymbol{x}\Big)\,dt\\
&=\int_0^1\Big(\int_{\{|\boldsymbol{x}|<\sqrt{\ln\frac{1}{t}}\}}d\boldsymbol{x}\Big)\,dt=\int_0^1\lambda_n(B(0,\sqrt{\ln\tfrac{1}{t}}))\,dt\\
&=\int_0^1\alpha_n\Big(\ln\tfrac{1}{t}\Big)^{n/2}\,dt=\alpha_n\int_0^\infty y^{n/2}e^{-y}\,dy\\
&=\alpha_n\Gamma\Big(1+\frac{n}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Použili jsme Fubiniovu větu a substituci

$$y=\ln\tfrac{1}{t},\quad\text{neboli } t=e^{-y}.$$

Jelikož

$$\begin{aligned}
I^2&=\int_{\mathbf{R}^2}e^{-x_1^2-x_2^2}\,dx_1\,dx_2=\int_0^\infty\Big(\int_0^{2\pi}re^{-r^2}\,d\alpha\Big)\,dr\\
&=2\pi\int_0^\infty re^{-r^2}\,dr=2\pi[\tfrac{1}{2}e^{-r^2}]_{r=0}^{\infty}=\pi
\end{aligned}$$

(z polárních souřadnic), máme $I=\sqrt{\pi}$,

$$\alpha_n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}.$$

Gamma funkci v $1+n/2$ spočteme rekurentně. Z (22.4) plyne

$$\Gamma(1/2)=2\int_0^\infty e^{-r^2}\,dr=I=\sqrt{\pi},$$

tedy podle (22.2)

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tfrac{3}{2})&=\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})=\tfrac{\sqrt{\pi}}{2},\\
\Gamma(\tfrac{5}{2})&=\tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})=\tfrac{3}{2}\tfrac{\sqrt{\pi}}{2},\\
&\dots
\end{aligned}$$

22.8. Stirlingova formule. Dokážeme

$$L := \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{s}{e}\right)^s \Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi}.$$

Máme

$$\begin{aligned} L &= \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(s - x + s\ln x - s\ln s\right) dx \\ &= \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-s(\tfrac{x}{s} - 1 - \ln\tfrac{x}{s})\right) dx \\ &= \lim_{a\to 0+} \int_0^\infty a \exp\left(-\frac{a^2x - 1 - \ln(a^2x)}{a^2}\right) dx. \end{aligned}$$

(V posledním řádku jsme zaměnili $s = a^{-2}$). Substituce $t = \frac{\ln a^2 x}{a}$ dává

$$L = \lim_{a\to 0+} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\left(\frac{e^{at} - 1 - at}{a^2} - at\right)\right) dx. \tag{22.6}$$

Jelikož

$$\lim_{a\to 0^+} \left(\frac{e^{at} - 1 - at}{a^2} - at\right) = \frac{t^2}{2},$$

je

$$L = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi},$$

pokud můžeme zaměnit limitu a integrál. Záměnu provedeme podle Lebesgueovy věty. Nalezení majoranty není tak úplně triviální. Označme

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - t, & t \ge 0, \\ e^t - t - 1, & t < 0 \end{cases}$$

a pro pevné $a \in (0,1)$ buď

$$g(t) = \frac{e^{at} - at - 1}{a^2} - at - f(t).$$

Pro $t > 0$ je

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{e^{at} - 1}{a} - a - t + 1, \\ g''(t) &= e^{at} - 1 \ge 0. \end{aligned}$$

Pro $t < 0$ máme

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{e^{at} - 1}{a} - a - e^t + 1, \\ g''(t) &= e^{at} - e^t \ge 0. \end{aligned}$$

Funkce $g(t)$ je tedy spojitá, konvexní na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ a limitním přechodem v derivaci snadno zjistíme

$$g'(0+) = 1 - a > 0, \qquad g'(0-) = -a < 0.$$

Odtud je zřejmé, že $g(t) > 0$ pro $t \neq 0$, tedy

$$\frac{e^{at} - at - 1}{a^2} - at \ge f(t).$$

Majoranta integrandu v (22.6) vzhledem k $a \in (0,1)$ je

$$e^{-f(t)} = \begin{cases} e^{-\frac{t^2}{2} + t}, & t > 0, \\ e^{1 + t - e^t}, & t < 0, \end{cases}$$

což je zřejmě integrovatelná funkce. Tím je důkaz završen.

22.9. Výpočet jistého určitého integrálu. Budeme počítat

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2p}}{1 + x^{2q}}\, dx,$$

kde $p < q$ jsou přirozená čísla. Vytvořme indexové množiny

$$A^+ = \{1, 3, \dots, 2q-1\}, \qquad A^- = \{-1, -3, \dots, -2q+1\},$$
$$A = A^+ \cup A^-.$$

Potom v komplexním oboru máme rozklad

$$z^{2q} + 1 = \prod_{k \in A} (z - z_k),$$

kde

$$z_k = e^{\mathrm{i}k\alpha}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2q}.$$

Označme

$$P_k(z) = \prod_{j \in A \setminus \{k\}} (z - z_j)$$

Potom zderivováním rovnosti

$$z^{2q} + 1 = (z - z_k)\, P_k(z)$$

dostaneme

$$2q\, z^{2q-1} = P_k(z) + (z - z_k) P_k'(z)$$

Dosazením $z = z_k$ odvodíme

$$2q\, z_k^{2q-1} = P_k(z_k). \tag{22.7}$$

Uvažujme rozklad racionální funkce na částečné zlomky

$$\frac{z^{2p}}{z^{2q}+1} = \sum_{j \in A} \frac{a_j}{z - z_j},$$

kde a_j jsou komplexní čísla, která zatím neznáme. Obě strany vynásobíme výrazem $z - z_k$ a dostaneme

$$\frac{z^{2p}}{P_k(z)} = \sum_{j \in A} \frac{a_j (z - z_k)}{z - z_j}$$

Limitní přechod pro $z \to z_k$ dává

$$\frac{z_k^{2p}}{P_k(z_k)} = a_k$$

a dosazením z (22.7) máme

$$a_k = \tfrac{1}{2q}\, z_k^{2p-2q+1} = -\tfrac{1}{2q}\, z_k^{2p+1},$$

neboť z_k řeší rovnici $z_k^{2q} = -1$. Nyní se budeme zabývat integrálem

$$I_k(R) = q \int_{-R}^{R} \Big(\frac{a_k}{x - z_k} + \frac{a_{-k}}{x - z_{-k}} \Big)\, dx, \quad k \in A^+.$$

Označme

$$\beta = (2p+1)\,\alpha, \quad \text{takže} \quad q\, a_k = -\tfrac{1}{2}\, e^{\mathrm{i}k\beta}.$$

Máme

$$\begin{aligned} q\Big(\frac{a_k}{x - z_k} + \frac{a_{-k}}{x - z_{-k}} \Big) &= -\frac{1}{2} \Big(\frac{e^{\mathrm{i}k\beta}}{x - e^{\mathrm{i}k\alpha}} + \frac{e^{-\mathrm{i}k\beta}}{x - e^{-\mathrm{i}k\alpha}} \Big) \\ &= \frac{\cos(k\beta - k\alpha) - x\cos k\beta}{x^2 - 2x\cos k\alpha + 1}. \end{aligned}$$

Substituce $x = y + \cos\alpha$ dává

$$\begin{aligned} I_k(R) &= \int_{-R}^{R} \frac{\cos(k\beta - k\alpha) - x\cos k\beta}{x^2 - 2x\cos k\alpha + 1}\, dx = \int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{\sin k\beta\, \sin k\alpha - y\cos k\beta}{y^2 + \sin^2 k\alpha}\, dy \\ &= \int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{\sin k\beta\, \sin k\alpha}{y^2 + \sin^2 k\alpha}\, dy - \int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{y\cos k\beta}{y^2 + \sin^2 k\alpha}\, dy. \end{aligned} \tag{22.8}$$

V druhém integrálu pravé strany rovnosti (22.8) využijeme lichost integrandu. Pokud $\cos k\alpha > 0$, dostaneme

$$\begin{aligned}\left|\int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{y\cos k\beta}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy\right| &= \left|\int_{-R-\cos k\alpha}^{-R+\cos k\alpha} \frac{y\cos k\beta}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy + \int_{-R+\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{y\cos k\beta}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy\right| \\ &= \left|\int_{-R-\cos k\alpha}^{-R+\cos k\alpha} \frac{y\cos k\beta}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy\right| \le \int_{-R-1}^{-R+1} \frac{R+1}{(R-1)^2}\,dy \\ &= \frac{2R+2}{(R-1)^2} \to 0.\end{aligned}$$

Ke stejnému závěru dojdeme analogicky i v případě $\cos k\alpha < 0$. Tedy

$$\lim_{R\to\infty} I_k(R) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R-\cos k\alpha}^{R-\cos k\alpha} \frac{\sin k\beta\,\sin k\alpha}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k\beta\,\sin k\alpha}{y^2+\sin^2 k\alpha}\,dy = \pi\sin k\beta,$$

neboť integrál přes $\mathbf{R}$ konverguje. Jelikož integrál I konverguje, máme

$$q\,I = q\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{x^{2p}}{x^{2q}+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\sum_{k\in A^+} I_k(R) = \sum_{k\in A^+}\lim_{R\to\infty} I_k(R) = \pi\sum_{k\in A^+}\sin k\beta$$

Počítejme

$$\begin{aligned}\frac{q\,I}{\pi} &= \operatorname{Im}\sum_{k\in A^+} e^{\mathrm{i}k\beta} = \operatorname{Im}\sum_{j=0}^{q-1} e^{\mathrm{i}(2j+1)\beta} = \operatorname{Im}\frac{e^{\mathrm{i}\beta}(1-e^{2\mathrm{i}q\beta})}{1-e^{2\mathrm{i}\beta}} = \operatorname{Im}\frac{2\,e^{\mathrm{i}\beta}}{1-e^{2\mathrm{i}\beta}} = \operatorname{Im}\frac{2}{e^{-\mathrm{i}\beta}-e^{\mathrm{i}\beta}} \\ &= \operatorname{Im}\frac{2i^2}{e^{\mathrm{i}\beta}-e^{-\mathrm{i}\beta}} = \operatorname{Im}\frac{i}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin\beta}.\end{aligned}$$

Zde jsme využili, že $2q\beta$ je lichý násobek π, takže $e^{2\mathrm{i}q\beta} = -1$. Tedy

$$I = \frac{\pi}{q\sin\left(\pi\frac{2p+1}{2q}\right)}.$$

22.10. Výpočet dalších určitých integrálů. Nyní budeme počítat

$$J(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt, \qquad s\in(0,1).$$

Nejprve uvažujme

$$s = \frac{2p+1}{2q},$$

kde p,q jsou jako v 22.9. Substituce $t = x^{2q}$ vede na

$$J(s) = 2q\int_0^\infty \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx = q\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx.$$

Podle předchozího výpočtu 22.9 je

$$J(s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}. \tag{22.9}$$

Vzorec (22.9) platí pro s z husté podmnožiny intervalu $(0,1)$. Ze spojitosti obou stran (ověřte samostatně předpoklady věty o spojitosti integrálu závislého na parametru) dostáváme (22.9) pro všechna $s\in(0,1)$.

Nyní budeme počítat hodnotu Beta funkce $B(1-s,s)$, $s\in(0,1)$. Máme

$$B(1-s,s) = \int_0^1 x^{-s}(1-x)^{s-1}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{x}\right)^{s-1}\frac{dx}{x}.$$

Substituce $t = (1-x)/x$ dává

$$B(1-s,s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi s}, \qquad s\in(0,1).$$

Konečně aplikací na Gamma funkci dostáváme

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}, \qquad s\in(0,1).$$

23. Literarura (další odkazy lze nalézt v [LM])

[LM] J. Lukeš, J. Malý: Míra a integrál. Univerzita Karlova, Praha 1993.

[DIPP] J. Malý: Derivace a integrál pro pokročilé.
`http://www/karlin/mff/cuni/cz/~maly/ipp.dvi`

[Vyb] J. Malý: Vybrané úlohy z míry a integrálu.
`http://www/karlin/mff/cuni/cz/~maly/prose.dvi`