4. TERMÍN – 15.2.2011

Používáte-li nějakou složitější větu, stručně ověřte její předpoklady.
Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!
Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [**10b**] Je dána rovnice (pro $t > 0$)

$$\int_0^t \Big\{y(s) + e^s + \sin s\Big\} y(t-s)ds + \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}\big(\sin t + \cos t\big).$$

(a) Odvoďte rovnici pro $X(p) = \mathcal{L}x(t)$.
(b) Vyjádřete $X(p)$ a určete Laplaceův vzor $x(t)$.

---

2. [**12b**] Nalezněte fundamentální řešení rovnice

$$\partial_{tt}u + \partial_{tx}u = 0.$$

Podrobněji:
(a) Uvažujte na pravé straně $\delta_0(t)\otimes\delta_0(x)$. Odvoďte rovnici pro $\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}_x\{u(t,x)\}$ (tj. Fourierova transformace pouze přes $x \in \mathbb{R}$).
(b) Užijte větu pro řešení ODR s konstantními koeficienty a Diracem na pravé straně.
(c) Vypočítejte zpětnou F.t. přes ξ. Užijte známe vzorečky a také fakt, že

$$\mathcal{F}\big\{\operatorname{sgn}(x)\big\} = \text{v.p. } \frac{1}{i\pi\xi}.$$

---

3. [**10b**] Pro následující formy ω nalezněte η takové, že $d\eta = \omega$. Nebo dokažte, že to není možné.
(a) $\omega = x^2e^y dx \wedge \big(\cos z dz + \sin z dy\big)$
(b) $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy + (x+z)dz$

(1) $$\int_0^t \{y(s) + e^s + \sin s\}\, y(t-s)\,ds + \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$$

$$Y = Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}(p)$$

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{p-1}$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}; \quad \mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{p}{p^2+1}$$

$$\left(Y + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2+1}\right)Y + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{p^2+1}\right)$$

$$Y^2 + \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2+1}\right)Y + \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p^2+1} = 0$$

tj.: $Y = -Q_1$ nebo $-Q_2$;

kde $Q_1 = \frac{1}{p-1}$

$Q_2 = \frac{1}{p^2+1}$.

$$y_1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{p-1}\right\} = -e^t$$

$$y_2 = \qquad -\sin t.$$

(2) $\partial_{tt} u + \partial_{tx} u = \delta_0(x) \otimes \delta_0(t)$; $\mathcal{F}_x$

$\partial_{tt} \hat{u} + 2\pi i \xi \, \partial_t \hat{u} = \delta_0(t)$.

pomocná úloha: $y'' + 2\pi i \xi y' = 0$

$y(0) = 0$

$y'(0) = 1$

$\lambda^2 + 2\pi i \xi \lambda = 0$: F.S.: $\{1, e^{-2\pi i \xi t}\}$

$y = a + b \cdot e^{-2\pi i \xi t}$

srovn.: $a + b = 0$; $a = -b$

$-2\pi i \xi b = 1$ $\quad b = \frac{-1}{2\pi i \xi}$

$\Rightarrow \hat{u} = \hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi i \xi}\left(1 - e^{-2\pi i \xi t}\right) \cdot Y(t)$

(2 b) wimc: $\frac{1}{2}\operatorname{sgn} x \xmapsto{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi i \xi}$

$T(x-a) \longmapsto \hat{T}(\xi)\cdot e^{-2\pi i \xi a}$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sgn} x - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-t)\right) Y(t)$$

$$= \underline{\chi_{(0,t)}(x)\cdot Y(t)}.$$

(3a) $\omega = x^2 e^y dx \wedge (\cos z \, dz + \sin z \, dy)$

$$= x^2 e^y \cos z \, dx \wedge dz + x^2 e^y \sin z \, dx \wedge dy$$

$$= x^2 e^y \underbrace{(-\cos z \, dz)}_{-d(\sin z)} \wedge dx + x^2 (-d e^y) \sin z \, dx$$

$$= d(-x^2 e^y \sin z) \wedge dx = d\{-x^2 e^y \sin z \, dx\}$$

3b) $\omega = (x+y)dx + (x-y)dy + (x+z)dz$

$$d\omega = \underbrace{dy \wedge dx}_{= -dx \wedge dy} + dx \wedge dy + dx \wedge dz = dx \wedge dz$$

$d\omega \neq 0 \Rightarrow \nexists \eta; \; d\eta = \omega.$