

4. TERMÍN – 11.2.2014

Používáte-li nějakou složitější větu, stručně však ověřte její předpoklady.
Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!
Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

1. [11b] Vyřešte rovnici (pro $t > 0$)

$$\int_0^t y''(t-s)y(s) ds - \int_0^t y'(t-s)y'(s) ds = \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t)$$
$$y(0) = 2$$
$$y'(0) = -2$$

pomocí Laplaceovy transformace. Není nutno provádět zkoušku.

2. [12b] Nalezněte fundamentální řešení Schrödingerovy rovnice

$$i\partial_t u + \partial_{xx} u = 0.$$

Podrobněji: uvažujte na pravé straně Diracovu míru v bodě $(x, t) = (0, 0)$.
Odvoďte rovnici pro $\hat{u} = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u$; vyřešte ji a proveďte zpětnou transformaci přes ξ .
Považujte za známý fakt, že $\mathcal{F}\{\exp(-i\pi^2 x^2)\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(i(x^2 - \frac{\pi}{4}))$.

3. [9b] Je dána 1-forma v \mathbb{R}^2 tvaru

$$\omega = x dx + y dy$$

Nechť Φ je zobrazení $x = u/(u^2 + v^2)$, $y = -v/(u^2 + v^2)$.

Nechť χ je zobrazení $u = r^{-1/2} \cos \varphi$, $v = r^{-1/2} \sin \varphi$.

Vypočítejte postupně (výlučně užitím definic):

(a) $\Phi^*(\omega)$

(b) $\chi^*\Phi^*(\omega)$

(c) navrhnete alternativní (jednodušší) způsob výpočtu (který nemusí užívat jen definic) a ověřte výše obdržené výsledky (návod: forma ω je speciálního tvaru)

$$(1) (p^2 Y(p) - 2p + 2) Y(p) - (p Y(p) - 2)^2 = \frac{2}{p^2 + 2}$$

$$Y(p) = \frac{2p^2 + 5}{(p+1)(p^2+2)} = \frac{7}{3(p+1)} + \frac{1-p}{3(p^2+2)}$$

$$y(t) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t - \frac{1}{3} \cos(\sqrt{2}t) + \frac{7}{3} e^{-t}$$

$$(2) \partial_t \hat{u} + 4\pi^2 \xi^2 i \hat{u} = \frac{1}{i} \delta_0(t)$$

$$\hat{u} = \hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{i} e^{-4\pi^2 \xi^2 i t} Y(t)$$

$$\mathcal{F}_t^{-1} : e^{-i\pi^2 \xi^2 t} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i(x^2 - \frac{\pi}{4})}$$

$$\mathcal{F}(c\xi) \rightarrow \frac{1}{c} \check{f}\left(\frac{x}{c}\right); c = 2\sqrt{t}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{Y(t)}{i} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{i\left(\frac{x^2}{4t} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$(3) a) \phi^*(\omega) = - \frac{u du + v dv}{u^2 + v^2}$$

$$b) \mathcal{R}^* \phi^*(\omega) = \frac{1}{2} dr$$

$$c) \omega = d\eta; \quad \eta = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow b) : d\phi^*(\eta) = d \frac{1}{2(u^2 + v^2)}$$

$$c) : d\mathcal{R}^* \phi^*(\eta) = d\left(\frac{r}{2}\right)$$