2. TERMÍN – 21.1.2014

Používáte-li nějakou složitější větu, není třeba formulovat znění, stručně však větu pojmenujte a ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

---

1. [**10b**] Pro $t > 0$ uvažujte soustavu

$$x(t) = \int_0^t y(s)ds$$
$$y(t) = \int_0^t z(s)ds + 1$$
$$z(t) + 4\int_0^t y(s)ds = 0$$

(a) Aplikujte (formálně) Laplaceovu transformaci $\mathcal{L}$
(b) Vyjádřete funkce $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, $Z(p) = \mathcal{L}\{z(t)\}$.
(c) Najděte příslušné Laplaceovy vzory.
(d) Ověřte zpětným dosazením, že nalezené funkce řeší původní soustavu.

---

2. [**12b**] Uvažujte rovnici pro (temperovanou) distribuci $u = u(x)$ v $\mathbb{R}$

$$u * u + 2u + \frac{iu'}{2\pi} = 2\xi$$

(a) Aplikujte (formálně) Fourierovu transformaci
(b) Vyřešte rovnici pro $\hat{u}$ a najděte inverzní Fourierovu tranformaci.
(c) Jaká distribuce je na pravé straně původní rovnice ?

---

3. [**10b**] Je dána 0-forma v $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$ předpisem

$$\omega = x^2 - y^2 - z^2$$

a funkce $\Phi : (r, u, v) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$ předpisem

$$x = r\cosh u \cosh v$$
$$y = r\cosh u \sinh v$$
$$z = r\sinh u$$

Vypočítejte:

(a) $\Phi^*(d\omega)$
(b) $d(\Phi^*(\omega))$
(c) $\Phi^*(dx \wedge dy)$

1. Příklad

transformace jednotlivých členů	[3]
vyjádření X(p),Y(p),Z(p)	[2]
inverze, zkouška	[5]

==

2. Příklad

transformace	[3]
vyjádření \hat{u}	[3]
inverze	[4]
prává strana původně ??	[2]

==

3. Příklad

výpočet (a)	[4]
výpočet (b)	[2]
výpočet (c)	[4]

(1) $x(t) = \int_0^t y(s)\,ds \qquad t>0$

$y(t) = \int_0^t z(s)\,ds + 1$

$z(t) + 4\int_0^t y(s)\,ds = 0$

$\mathcal{L}: \; x(t) \to X(p) \qquad 1 \longmapsto \frac{1}{p}$

$\quad\; y \qquad\; Y$

$\quad\; z \qquad\; Z \qquad \int_0^t y(s)\,ds = (1 * y)(t) \to \frac{1}{p}Y(p)$; etc.

$X = \frac{1}{p}Y, \quad Y = \frac{1}{p}Z + \frac{1}{p}, \quad Z + \frac{4}{p}Y = 0$

---

p . (2rce) + 3. rce : $\quad \underline{pY} + Z + \frac{4}{p}Y = \underline{Z + 1}$

$Y = \frac{p}{p^2+4}; \Rightarrow$

$Z = \frac{-4}{p^2+4}, \; X = \frac{1}{p^2+4}$

$\mathcal{L}_{-1}: \; x(t) = \frac{1}{2}\sin 2t; \; y(t) = \cos 2t; \; z(t) = -2\sin 2t$

---

zkouška: $\int_0^t y(s)\,ds = \left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}\sin 2t$

1. a 3. rce O.K.

$\int_0^t z(s)\,ds = \left[\cos 2t\right]_0^t = \cos 2t - 1$

2. rce O.K.

(2) $u * u + 2u + \frac{i}{2\pi} u' = 2\xi$ $\quad / \mathcal{F}$

$$\hat{u}^2 + 2\hat{u} + \frac{i}{2\pi} 2\pi i \xi \hat{u} = 2\xi$$

$$\hat{u}^2 + (2-\xi)\hat{u} - 2\xi = 0$$

$$D^2 = (2-\xi)^2 + 8\xi = (2+\xi)^2 \ ; \ \hat{u}_{1,2} = \frac{1}{2}\left((\xi-2) \pm (2+\xi)\right)$$

$$= \xi, -2.$$

$$\mathcal{F}: \ \delta_0 \longmapsto 1 \qquad : \quad u_1 = \frac{\delta_0'}{2\pi i}$$

$$\delta_0' \longmapsto 2\pi i \xi \qquad u_2 = -2\delta_0$$

$$PS = 2\left[\frac{\delta_0'}{2\pi i}\right]^{\wedge\vee} = \frac{\delta_0'}{\pi i}$$

---

u_2: $(-2\delta_0) * (-2\delta_0) = 4 \underbrace{\delta_0 * \delta_0}_{Id} = 4\delta_0$

$$2(-2\delta_0) \qquad = -4\delta_0$$

$$-2\frac{i}{2\pi}(\delta_0)' \qquad = \frac{-i}{\pi}\delta_0' = PS$$

---

u_1: $\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 (\delta_0' * \delta_0') = \frac{-1}{4\pi^2}\delta_0''$

$$+2\frac{\delta_0'}{2\pi i} = +\frac{\delta_0'}{\pi i} = PS$$

$$\frac{i}{2\pi}\left(\frac{\delta_0'}{2\pi i}\right)' = \frac{1}{4\pi^2}\delta_0''$$

(3) (a) $dw = 2x\,dx - 2y\,dy - 2z\,dz$

$$dx = \operatorname{ch}u \operatorname{ch}v\,dr + r \operatorname{sh}u \operatorname{ch}v\,du + r\operatorname{ch}u \operatorname{sh}v\,dv$$
$$dy = \operatorname{ch}u \operatorname{sh}v\,dr + r \operatorname{sh}u \operatorname{sh}v\,du + r\operatorname{ch}u \operatorname{ch}v\,dv$$
$$dz = \operatorname{sh}u\,dr + r\operatorname{ch}u\,du \quad ; \quad „\mathrm{ch}" = \cosh, \; „\mathrm{sh}" = \sinh$$

$$\Phi^*(x\,dx) = r\operatorname{ch}^2u \operatorname{ch}^2v\,dr + r^2 \operatorname{ch}u\,\underline{\operatorname{sh}u} \operatorname{ch}^2v\,du + r^2\operatorname{ch}^2u\,\cancel{\operatorname{ch}v \operatorname{sh}v}\,dv$$

$$\Phi^*(y\,dy) = r\operatorname{ch}^2u \operatorname{sh}^2v\,dr + r^2 \operatorname{ch}u\,\underline{\operatorname{sh}u} \operatorname{sh}^2v\,du + r^2\operatorname{ch}^2u\,\cancel{\operatorname{sh}v \operatorname{ch}v}\,dv$$

$$\Phi^*(z\,dz) = r\operatorname{sh}^2u\,dr + r^2 \cancel{\operatorname{sh}u \operatorname{ch}u}\,du$$

$\Phi^*(dw) = 2r\,dr$; pomocí vzorce „$\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$"

(b) $\Phi^*(w) = r^2$; $d\Phi^*(w) = 2r\,dr$

(c) $\Phi^*(dx \wedge dy) =$

$$= (\operatorname{ch}u \operatorname{ch}v\,dr + r \operatorname{sh}u \operatorname{ch}v\,du + r\operatorname{ch}u \operatorname{sh}v\,dv)$$
$$\wedge (\operatorname{ch}u \operatorname{sh}v\,dr + r \operatorname{sh}u \operatorname{sh}v\,du + r\operatorname{ch}u \operatorname{ch}v\,dv)$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \operatorname{ch}u \operatorname{ch}v, & r\operatorname{sh}u \operatorname{ch}v \\ \operatorname{ch}u \operatorname{sh}v, & r\operatorname{sh}u \operatorname{sh}v \end{vmatrix}}_{0} dr \wedge du + \underbrace{\begin{vmatrix} \operatorname{ch}u \operatorname{ch}v, & r\operatorname{ch}u \operatorname{sh}v \\ \operatorname{ch}u \operatorname{sh}v, & r\operatorname{ch}u \operatorname{ch}v \end{vmatrix}}_{r\operatorname{ch}^2u} dr \wedge dv$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} r\operatorname{sh}u \operatorname{ch}v, & r\operatorname{ch}u \operatorname{sh}v \\ r\operatorname{sh}u \operatorname{sh}v, & r\operatorname{ch}u \operatorname{ch}v \end{vmatrix}}_{r^2 \operatorname{ch}u \operatorname{sh}u} du \wedge dv$$