1. TERMÍN – 15.1.2014

Používáte-li nějakou složitější větu, stručně však ověřte její předpoklady.
Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!
Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [**10b**] Je dána rovnice (pro $t > 0$)

$$x'' + \int_0^t \{x'(s) - x(s)\} \cosh(t-s)\, ds = 0,$$

s počátečními podmínkami

$$x(0) = -3, \qquad x'(0) = -1.$$

(a) Odvoďte rovnici pro $X(p) = \mathcal{L}x(t)$.
(b) Vyjádřete $X(p)$ a určete Laplaceův vzor $x(t)$.

Není nutno provádět zkoušku.

---

2. [**11b**] Je dána rovnice

$$u + 2u' + u'' = \delta_0(x)$$

pro neznámou distribuci $u = u(x)$ v $\mathbb{R}$.
(a) Aplikujte (formálně) Fourierovu transformaci
(b) Vyjádřete $\hat{u}(\xi)$ (pokuste se vlevo doplnit na čtverec)
(c) Nalezněte $u(x)$. Považujte za známý fakt, že $\mathcal{F}\{Y(x)\exp(-x)\} = 1/(2\pi i\xi + 1)$
(d) Spočítejte první a druhou distributivní derivaci nalezené funkce $u(x)$ (z definice či pomocí vhodné věty) a proveďte zkoušku!

---

3. [**11b**] Nechť $u = u(x,y)$ je hladká funkce v kartézských souřadnicích.
Nechť Φ je přechod k polárním souřadnicím, tj. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.
Nechť $\mathcal{I}_K$ je pravidlo formální záměny $dx \to dy$, $dy \to -dx$.
Nechť $\mathcal{I}_P$ je pravidlo formální záměny $dr \to r d\varphi$, $d\varphi \to -dr/r$.

(a) vyčíslete formu $d(\mathcal{I}_K(du))$
(b) Ukažte, že $\Phi^*\mathcal{I}_K(\omega) = \mathcal{I}_P\Phi^*(\omega)$ pro případ 1-forem $\omega = dx$ a $\omega = dy$.
(c) Vyčíslete formu $d(\mathcal{I}_P(d\tilde{u}))$, kde $\tilde{u} = \tilde{u}(r,\varphi)$ je hladká funkce v polárních souřadnicích.
Který známý vzorec jsme „odvodili“ ?

1. Příklad

transformace jednotlivých členů [3]

vyjádření X(p) [2]

parciální zlomky, rozklad, inverze [5]

==

2. Příklad

transformace [2]

vyjádření \hat{u} [1]

inverze [3]

derivace a dosazení [5]

==

3. Příklad

výpočet (a) [3]

výpočty (b) [3]

výpočet (c) [3]

správné porovnání [2]

(1) $x'' + \{x' - x\} * \cosh = 0 \quad ; \quad x(0) = -3, \; x'(0) = -1$

vzorce: $x''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2X(p) - x'(0) - p x(0)$

$x'(t) \longrightarrow pX(p) - x(0)$

$\cosh t \longrightarrow \dfrac{p}{p^2-1}$

$$p^2X + 1 + 3p + \{pX + 3 - X\} \cdot \frac{p}{p^2-1} = 0$$

$$X = -\frac{3p^3 + p^2 - 1}{p^4 - p} = \frac{Ap+B}{p^2+p+1} + \frac{C}{p} + \frac{D}{p-1}$$

$$= \frac{-p-1}{p^2+p+1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}$$

$\mathcal{L}_{-1}$: $\dfrac{1}{p} \longrightarrow 1 \quad , \quad \dfrac{1}{p-1} \longrightarrow e^t$

$$\frac{1}{p^2+p+1} = \frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \longrightarrow e^{-\frac{t}{2}} \mathcal{L}_{-1}\left(\frac{1}{p^2 + 3/4}\right) = e^{-\frac{t}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$$

$$\frac{p+\frac{1}{2}}{p^2+p+1} \longrightarrow e^{-\frac{t}{2}} \mathcal{L}_{-1}\left(\frac{p}{p^2+3/4}\right) = e^{-t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$$

$$x(t) = e^{-t/2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) - e^t - 1$$

(2) $u + 2u' + u'' = \delta_0(t)$ $\mathcal{F}u = \hat{u}$

$$\hat{u} + 4\pi i\xi\hat{u} + (2\pi i\xi)^2\hat{u} = 1$$

$$\hat{u}\,(1 + 2\pi i\xi)^2 = 1 \qquad \hat{u} = \frac{1}{(1+2\pi i\xi)^2}.$$

víme: $Y(x)e^{-x} \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{2\pi i\xi + 1}$

$$-2\pi i x\, Y(x) e^{-x} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d}{d\xi}\frac{1}{2\pi i\xi + 1} = \frac{-2\pi i}{(2\pi i\xi + 1)^2}$$

$\Rightarrow$ $u(x) = xe^{-x}Y(x) = f(x)Y(x)$; $f(x) \in C^\infty$ fce

L. 27.4: $\dfrac{d}{dx}u(x) = f'(x)Y(x) = e^{-x}(1-x)\,Y(x)$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 u(x) = f''(x)Y(x) + f'(0)\,\delta_0$$

$$= e^{-x}(x-2)\,Y(x) + \delta_0 .$$

---

tj. ve smyslu $\mathcal{D}'$: $u + 2u' + u'' = e^{-x}Y(x)\,(x - 2 + x + 2 - 2x) + \delta_0$

$$= \delta_0 .$$

(3)

(a) $$d\,\partial_2\, du = d\,\partial_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx\right)$$
$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dy\right)\wedge dy - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)\wedge dx = \boxed{\Delta u\, dx\wedge dy}$$

(b) $$\phi^*(\partial_2\, dx) \overset{!}{=} \phi^*(dy) = d(r\sin\varphi) = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$
$$\partial_2\, \phi^*(dx) = \partial_2\, d(r\cos\varphi) = \partial_2(\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi) \quad //$$
$$= \cos\varphi\, r\, d\varphi - r\sin\varphi\left(-\frac{dr}{r}\right) \quad \sqrt{\text{o.K.}}$$

$$\phi^*(\partial_2\, dy) = \phi^*(-dx) = -d(r\cos\varphi) = -\cos\varphi\, dr + r\sin\varphi\, d\varphi$$
$$\partial_2\, \phi^*(dy) = \partial_2\, d(r\sin\varphi) = \partial_2(\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi)$$
$$= \sin\varphi\, r\, d\varphi + r\cos\varphi\left(-\frac{dr}{r}\right) \quad \underline{\text{o.K.}}$$

(c) $$d(\partial_2\, d\,\phi^*(u)) = d\left(\partial_2\left(\frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi\right)\right)$$
$$= d\left(\frac{\partial u}{\partial r}\, r\, d\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{r}dr\right) =$$
$$= \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\wedge dr + \cancel{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\wedge d\varphi}\right\}\wedge d\varphi$$
$$- \left\{\cancel{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\right)dr} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{r}\right)d\varphi\right\}\wedge dr$$
$$= \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{1}{r}\right\} dr\wedge d\varphi$$

---

vzorec: $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \Delta u$$

neboť (!) $\quad dx\wedge dy = r\, dr\wedge d\varphi.$