$$|F(z)e^{tz}| \le \underbrace{|F(z)|}_{\le \frac{K}{|z|^2}} \cdot \underbrace{e^{\mathrm{Re}\, tz}}_{\le e^{\mathrm{Re}\, tc}} \qquad t>0$$

26. Speciální funkce

Def. Gamma funkce (Eulerův integrál 2. druhu) je definována jakožto $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$

$z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, z > 0$

Pozn. definice korektní:

$$\int_0^\infty |t^{z-1} e^{-t}|\, dt = \int_0^\infty t^{\mathrm{Re}\, z - 1} e^{-t}\, dt < \infty \Leftrightarrow \mathrm{Re}\, z > 0$$

$t^{z-1} = \exp((z-1)\ln t)$

$t \in (0,\infty)$

$|t^{z-1}| = \exp(\mathrm{Re}(z-1)\ln t) = t^{\mathrm{Re}\{z-1\}}$

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$
- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \forall z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, z > 0$ // d-cv. per-partes a indukce

  $\Gamma(z+n+1) = z(z+1)\cdots(z+n)\Gamma(z)$
- $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- jiné vyjádření: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt = \left| \begin{matrix} t = u^2 & u = \sqrt{t} \\ dt = 2u\, du & \end{matrix} \right| =$

  $= 2\int_0^\infty u^{2z-1} e^{-u^2}\, du$

  spec. $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$

  $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)\sqrt{\pi}$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^n}\, dx = \left| \begin{matrix} x^n = t \\ x = t^{1/n} \\ dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} \end{matrix} \right| = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Motivace: zobecnění faktoriálu; $1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots \frac{x^n}{n!}$

$[Pf](t) = \int_0^t f(s)\, ds$ … primitivní funkce

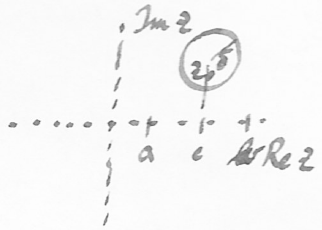
$Pf = f * 1$

$\boxed{\text{• výpočty integrálů: } \mathcal{L}\{t^\alpha\} = \int_0^\infty t^\alpha e^{-pt}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}}$

$P^{(n)}f = P(P\cdots Pf) = f * \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$: kdyby bylo n záporné → dostanu derivaci

Věta 26.1. $\Gamma(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$; $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}$

DK ukážeme $\Gamma \in \mathcal{H}(U(z_0))$; $\forall z_0 \in \Omega$ pevné



$U(z_0) = U(z_0, \delta)$

$0 < a < \operatorname{Re} z_0 = c < b < \infty$

derivace integrálu dle parametru

$f(t,z) = t^{z-1} e^{-t}$

- $f(\cdot, z)$ měřitelná v $(0,\infty)$ $\forall z \in U(z_0)$ (spojitá)
- $\exists \dfrac{\partial f}{\partial z} = t^{z-1} \cdot \ln t \cdot e^{-t}$ $\forall z \in U(z_0)$, $\forall t \in (0,\infty)$
- $f(\cdot, z_0) \in L^1(0,\infty)$: $|f(t,z_0)| = |t^{z_0-1}| e^{-t} = t^{\operatorname{Re} z_0 - 1} e^{-t} = t^{c-1} e^{-t} \in L^1$

klíčový předpoklad

$$h(t) := \sup_{z \in U(z_0)} \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \right| \in L^1(0,\infty)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \right| = |t^{z-1}| \cdot |\ln t| \cdot e^{-t} = t^{\operatorname{Re} z - 1} |\ln t| \cdot e^{-t}$$

$a < \operatorname{Re} z < b$: $t^{\operatorname{Re} z - 1} \leq$ t^{b-1} $t > 1$; t^{a-1} $t \in (0,1)$

tj. $h(t) \leq (t^{b-1} + t^{a-1}) |\ln t| \cdot e^{-t}$

tvrdíme $h \in L^1(0,\infty)$; $0 < a < b$ pevná

$$\int_0^\infty h = \int_0^\delta + \int_\delta^K + \int_K^\infty = I_1 + I_2 + I_3$$

$h(t)$ spojitá a tedy omezená v $[\delta, K]$ $\Rightarrow I_2 < \infty$ $\forall\, 0 < \delta < K < \infty$

u $0+$: $h(t) \sim |\ln t| \cdot t^{a-1}$; $t \to 0+$

$\delta > 0$ malé : $\int_0^\delta h < \infty \Leftrightarrow \int_0^\delta t^{a-1} \ln t \, dt < \infty$

volme $\varepsilon > 0$; $a - 1 - \varepsilon > -1$

$$\underbrace{t^{a-1-\varepsilon}}_{\in L^1(0,\delta)} \cdot \underbrace{t^{\varepsilon} |\ln t|}_{\to 0,\ t \to 0+ \text{ a tedy } \leq 1 \text{ na } (0,\delta);\ \delta \text{ malé}} \in L^1(0,\delta)$$

u ∞: $h(t) = \underbrace{(t^{a-1}+t^{b-1})|\ln t|\cdot e^{-t/2}}_{\to 0;\, t\to\infty} \cdot \underbrace{e^{-t/2}}_{\in L^1(K,\infty)}$

a tedy ≤ 1; $t\in(K,\infty)$; K dost velké

věta o derivaci integrálu dle parametru:

parametr $a \in J \subset \mathbb{R}$

$\times$

situace zde $z \in U(z_0) \subset \mathbb{C}$: jde o derivaci dle komplexní proměnné

řádný důkaz: $\Gamma(z) = \Gamma(x+iy) = \underbrace{\int_0^\infty f_1(x,y,t)\,dt}_{\Gamma_1(x,y)} + i\underbrace{\int_0^\infty f_2(x,y,t)\,dt}_{\Gamma_2(x,y)}$

+ C.R. podmínky

Věta 26.2. Funkci $\Gamma(z)$ lze holomorfně rozšířit na $\tilde{\Omega} = \{z\in\mathbb{C};\, z\neq 0,-1,-2,\dots\}$

V bodech $0,-1,-2,\dots$ má toto rozšíření jednoduché póly a $\operatorname{res}_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$

DK víme: $z(z+1)\cdots(z+n)\cdot\Gamma(z) = \Gamma(z+n+1)$

$(*)$ $\Gamma(z) = \underbrace{\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}}_{\Gamma_n(z)}$ $\forall z\in\Omega = \{\operatorname{Re} z > 0\}$

pozoruji $\Gamma_n(z) \in \mathcal{H}(\Omega_n)$; $\Omega_n = \{\operatorname{Re} z > -n-1;\, z\neq 0,-1,\dots,-n\}$

definuji rozšířenou gamma funkci

$\Gamma(z) := \Gamma_n(z)$; $z\in\Omega_n$

- je to rozšíření? $(*) \Rightarrow \Gamma(z) = \Gamma_n(z)$; $z\in\Omega$
- nezávislost na n? nechť $m > n$ $(\Omega_m \supset \Omega_n)$

$\Gamma_m, \Gamma_n \in \mathcal{H}(\Omega_n)$; $\Omega_n \dots$ souvislá

$N = \{z\in\Omega_n;\, \Gamma_n(z) = \Gamma_m(z)\} \overset{(*)}{\supseteq} \Omega$

a tedy N má v Ω_n hromadný bod (např. 1)

Věta o jednoznačnosti: $\Rightarrow \Gamma_m = \Gamma_n$ v Ω_n

$\Gamma(z)$ je definovaná a holomorfní na $\bigcup_n \Omega_n = \tilde{\Omega}$

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \operatorname{res}_{-n} \Gamma_n(z) = \operatorname{res}_{-n} \underbrace{\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}}_{\in \mathcal{H}(U(-n))} \cdot \frac{1}{(z+n)}$$

$\Gamma = \Gamma_n$ na $\Omega_n \supset P(-n)$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Dodatek: (*) platí pro $\forall z \in \tilde{\Omega}$ a rozšíření je jediné (ve třídě holomorfních funkcí)

Věta 26.3. [Stirlingova formule]

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ (s \in \mathbb{R})}} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{e}{s}\right)^s \Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi}$$

speciálně $\quad n! \sim \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \; ; \; \begin{array}{c} n \to \infty \\ (n \in \mathbb{N}) \end{array}$

DK

$$L = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{e}{s}\right)^s \int_0^\infty x^s e^{-x} dx =$$

$$= \lim_{s \to \infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(s - x + s \ln x - s \ln s\right) dx$$

$$= \lim_{s \to \infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-s\left[\frac{x}{s} - 1 - \ln \frac{x}{s}\right]\right) dx$$

$s = \frac{1}{a^2} \; ; \; a \to 0+$

$$= \lim_{a \to 0+} \int_0^\infty a \cdot \exp\left(-\frac{a^2 x - 1 - \ln(a^2 x)}{a^2}\right) dx$$

substituce: $\quad t = \frac{\ln a^2 x}{a} \in (-\infty, \infty)$

$dt = \frac{dx}{a \cdot x}$

$at = \ln(a^2 x)$

$\exp(at) = a^2 x$

$x = \frac{1}{a^2} \exp(at)$

$dx = \frac{1}{a} \exp(at) dt$

$$L = \lim_{a \to 0+} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{e^{at}-1-at}{a^2} + at\right) dt$$

$$= \lim_{a \to 0+} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-f(a,t)\right) dt \quad ; \quad f(a,t) = \frac{e^{at}-1-at}{a^2} - at$$

Taylor : $f(a,t) \to \frac{t^2}{2}$; $a \to 0+$; $t>0$ pevné

formálně $L = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$

? záměna lim a $\int$: Lebesgueova věta

$$f(t) := \begin{cases} \frac{t^2}{2} - t & ; t \geq 0 \\ e^t - t - 1 & ; t < 0 \end{cases}$$

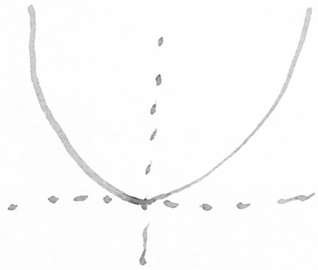
$g(t) := f(a,t) - f(t)$; $a \in (0,1)$ pevné

postupně se ukáže: $g'' \geq 0 \quad t \gtrless 0$

$g'_+(0) > 0$

$g'_-(0) < 0$

$g(0) = 0$



tudíž

$\Rightarrow g(t) \geq 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$

$\exp(-f(a,t)) \leq \exp(-f(t))$

snadné pozorování : $\in L^1(\mathbb{R})$

Def. Funkcí Beta (neboli Eulerovým integrálem 1. druhu) rozumíme

$$B(p,q) := \int_0^1 \underbrace{(1-t)^{p-1} t^{q-1}}_{f(p,q,t)} dt \quad ; \; p,q \in \mathbb{C} ; \; \mathrm{Re}\, p,q > 0$$

Pozn. definice je korektní : $|f(p,q,t)| \sim t^{\mathrm{Re}\, q - 1}$, $t \to 0+$

- $B(p,q) = B(q,p)$; $B(p,1) = B(1,p) = \frac{1}{p}$

- $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
- $B(s,1-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$; $\operatorname{Re} s \in (0,1)$

Definice: Besselovou rovnicí řádu s $(\in \mathbb{R})$ rozumíme

$$(B_r) \qquad x^2 y'' + x y' + (x^2 - s^2) y = 0 \quad , x \in (0,\infty)$$

Definice: Besselovou funkcí 1. druhu s indexem $\underline{s}$ rozumíme

$$(B_f) \qquad J_s(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$x \in (0,\infty)$ s úmluvou $\dfrac{1}{\Gamma(k)} := 0$ pro $k \le 0$ celé

Věta 26.4. Řada v (B_f) konverguje absolutně pro každé $x \in (0,\infty)$ a její součet $J_s(x)$ je řešením Besselovy rovnice (B_r)

DK $\quad a_n :=$ člen řady ; $x > 0$ pevné

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \underbrace{\frac{n!}{(n+1)!}}_{\frac{1}{n+1}} \underbrace{\frac{\Gamma(n+1+s)}{\Gamma(n+2+s)}}_{\frac{1}{(n+s+1)}} \cdot \left|\frac{x}{2}\right|^2 \qquad // \ \Gamma(z)z = \Gamma(z+1)$$

řešme (B_r) ve tvaru

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\rho+n} \qquad \rho \in \mathbb{R} \text{ určíme později}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n) a_n x^{\rho+n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n)(\rho+n-1) a_n x^{\rho+n-2}$$

$$(B_r): \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\rho+n)(\rho+n-1) x^{\rho+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\rho+n) x^{\rho+n} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\rho+n+2}}_{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{\rho+n}} - \sum_{n=0}^{\infty} s^2 a_n x^{\rho+n} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big[a_n\big(\underbrace{(\rho+n)^2-s^2}_{n(2s+n)}\big)+a_{n-2}\Big]x^{\rho+n}+a_0(\rho^2-s^2)\,x^{\rho}+a_1\big((\rho+1)^2-s^2\big)\cdot x^{\rho+1}=0$$

$\cancel{a_n = \frac{-1}{n}}$ volme $\rho = s$

$$(\rho+n)^2-s^2=(s+n)^2-s^2=2ns+n^2=n(2s+n)$$

$$a_1 := 0$$

$$a_n = \frac{-1}{n(2s+n)}\,a_{n-2}$$

$$a_{2k+1}=0 \quad \forall k \geq 0 \text{ celé}$$

$$a_{2n} = \frac{-1}{2n(2s+2n)}\cdot a_{2n-2}$$

$$= \frac{-1}{4\cdot n(s+n)}\,a_{2(n-1)}$$

$$= \frac{(-1)(-1)}{4\cdot 4\, n(n-1)(s+n)(s+n-1)}\cdot a_{2(n-2)} =$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n n!\,\Gamma(s+n+1)\,2^s}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\,x^{2n+s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(s+n+1)}\cdot\frac{x}{2^{2n}}\cdot\frac{x^s}{2^s}$$

$= J_s(x)$

- formálně rovnice splněna
- derivace člen po členu OK

  poloměr konvergence ∞

Pozn. $s<0$; celé; $s=-k$; $k\in\mathbb{N}$

$$J_s(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(s+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

(úmluva $\Rightarrow$) $\sum_{n=k}^{\infty}$

$$a_{2n}\,4n(s+n)+a_{2n-2}=0$$

Pozn.

$\Gamma(z) \in \mathcal{H}(P(\ell))$; $\ell \leq 0$ celé

↳ jednoduchý pól

$\Gamma(z) \to \infty$; $z \to \ell$

$\Rightarrow \Gamma(z) \neq 0$ v jistém $P(\ell)$

$\frac{1}{\Gamma(z)} \to 0$ ~~v jistém $P(\ell)$~~ $z \to \ell$

tj. $\frac{1}{\Gamma(z)}$ má v $z=\ell$ odstranitelnou singularitu

Věta 26.5. [Sturmova srovnávací věta]

Nechť $p(x) > 0$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ jsou spojité funkce

Nechť $u(x)$ je netriviální řešení rce

$(p(x)u')' + q_1(x)u = 0$

nechť $v(x)$ je řešení rce

$(p(x)v')' + q_2(x)v = 0$

nechť (klíčový předpoklad) $a_2(x) > a_1(x)$

Potom mezi každými dvěma sousedními nulovými body fce $u(x)$ leží aspoň jeden nulový bod fce $v(x)$

Názorně $u'' = -q_1(x)u$ kmitání pružiny

$v'' = -q_2(x)v$

↳ větší tuhost

Závěr: v kmitá ne pomaleji

DK $x_1 < x_2$ sousední nulové body $u(x)$

$u(x_1) = u(x_2) = 0$

leč: $u \neq 0$ v (x_1, x_2) ; BÚNO : $u > 0$

odtud leží: $u'(x_1) \geq 0$; $u'(x_2) < 0$

?? $u'(x_1) < 0 \Rightarrow u < 0$ na $P_+(x_1)$ spor

$\left.\begin{array}{l} u'(x_1) = 0 \\ u(x_1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u \equiv 0$ rce 2. řádu nulové poč. podmínky

~~Tvrdím~~

Tvrdím: $v(x)$ má nulu v $[x_1, x_2]$

?? $v \neq 0$ v $[x_1, x_2]$; BÚNO $v > 0$

tvrd

trik : (rce pro u)$\cdot v$ − (rce pro v)u

$$\underbrace{(pu')'v - (pv')'u}_{\text{per partes}} + (q_1(x) - q_2(x))\,uv = 0 \quad \Big/ \int_{x_1}^{x_2}$$

$$\Big[pu'v - \underbrace{pv'u}_{0}\Big]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{pu'v' - pv'u'}_{\equiv 0} + \int_{x_1}^{x_2}(q_1 - q_2)\,uv = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{p(x_2)}_{>0}\,\underbrace{u'(x_2)}_{<0}\,\underbrace{v(x_2)}_{>0}}_{<0} - \underbrace{\underbrace{p(x_1)}_{>0}\,\underbrace{u'(x_1)}_{>0}\,\underbrace{v(x_1)}_{>0}}_{<0} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{(q_1 - q_2)}_{\leq 0}\,\underbrace{uv}_{\geq 0}}_{\text{k.p.}} = 0$$

<u>spor</u>

tady nic není

Důsledky 1.: Nechť $u(x)$ je netriviální řešení rce $u'' + q(x)u = 0$, nechť $a > 0$ je konstanta

(i) je-li $q(x) \geq a$, pak sousední nulové body $u(x)$ jsou blíže než $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$

(ii) je-li $q(x) \leq a$, pak sousední nulové body jsou alespoň $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$ od sebe

DK (ii) sporem: sousední $x_1 < x_2$ nulové body $u(x)$

$$x_2 - x_1 < \frac{\pi}{\sqrt{a}}$$

pomocná rce $v'' + av = 0$ ... obecné řešení

$$y = \sin\sqrt{a}(x - x_0)$$

... nulové body mají rozteč $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$

(i) d.cv.

2. $J_s(x)$ má v $(0, \infty)$ nekonečný počet nulových bodů a vzdálenost sousedních se blíží π pro $x \to \infty$

DK $z(x) := x^{1/2} J_s(x)$ ... $J_s(x) = x^{-1/2} z(x)$

$$J_s'(x) = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} z + x^{-\frac{1}{2}} z'$$

$J_s''(x) = \dots$ d.cv.

$$z'' + \underbrace{\left(1 + \frac{1/4 - s^2}{x^2}\right)}_{q(x)} z = 0$$

$q(x) \rightsquigarrow 1$ pro x velké

pozorujů: $q(x) \to 1$; $x \to \infty$: $\forall\, \varepsilon \in (0,1)\ \exists K > 0$

$$(1-\varepsilon)^2 < q(x) < (1+\varepsilon)^2 ;\ x > K$$

důsl.(1) => nulové body $z(x)$

- blíže než $\frac{\pi}{1-\varepsilon}$
- dále než $\frac{\pi}{1+\varepsilon}$

v (K, ∞)

Pozn.: lze dokázat přesnější aproximaci

$$J_s(x) \simeq \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi x}}}_{\text{tlumení}} \cdot \underbrace{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(s + \frac{1}{2}\right)\right)}_{\text{oscilace}} ;\ x \gg 1$$

Poznámka: (B_r) $x^2y'' + xy' + (x^2 - s^2)y = 0$

ODR lin 2. řádu $\rightsquigarrow$ F.S. $= \{J_s(x), ???\}$

↳ musí mít 2 prvky

? $J_{-s}(x)$.... funguje pro $s \notin \mathbb{Z}$

$k \in \mathbb{N}$: $J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x)$ ... d.cv. $\left(\frac{1}{\Gamma(z)} = 0;\ z \leq 0 \text{ celé} \right)$

nutno definovat

Besselovu fci 2. druhu $Y_k(x) := \lim\limits_{s \to k} \dfrac{J_s(x)\cos(\pi s) - J_{-s}(x)}{\sin(\pi s)}$

$s \notin \mathbb{Z}$ $\{J_s(x), J_{-s}(x)\}$ tvoří F.S. pro (B_r)

LN?: $J_s(x) \sim x^s$; $x \to 0+$, fce nemohou být závislé

Věta 26.6.* Je dána úloha

(1) $(p(x)u')' + (q(x) + \lambda r(x))u = 0$; $x \in (a,b)$

kde p, q, r spojité, $p > 0$, $r > 0$

s okrajovou úlohou

(2a) $c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0$ $(c_1, c_2) \neq (0,0)$

(2b) $c_3 u(b) + c_4 u'(b) = 0$ $(c_3, c_4) \neq (0,0)$

alternativně lze uvažovat periodickou okr. podmínku

(3) $u(a) = u(b)$, $u'(a) = u'(b)$

Pak existuje posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$; $\lambda_n \nearrow \infty$ taková, že (1) s okr. podm. (2a), (2b) nebo (3) má netriviální řešení pouze pro $\lambda = \lambda_n$. Tato řešení $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří úplnou OG bázi Hilbertova prostoru $L^2_r(a,b)$ určeného skal. součinem $\langle f, g\rangle_r := \int_a^b f(x)g(x)r(x)\,dx$

Komentář $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická $\Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ vl. vektory $\{u_1, \dots, u_n\}$ tvoří OG bázi $\mathbb{R}^n$

$L^2_r(a,b) = \{f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ měřitelné; $\int_a^b |f(x)|^2 r(x)\,dx < \infty\}$

$\{u_n\}_n$ ... je úplná OG báze: je-li $f(x) \in L^2_r$ a $\langle f, u_n\rangle_r = 0$, pak nutně $f = 0$

ekvivalentně $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\langle f, u_n\rangle_r}{\langle u_n, u_n\rangle_r} u_n$; konvergence řady v prostoru L^2_r