## Aproximace $C^1$ křivky lomenou čarou.

Cílem tohoto textu je provedení poslední technické části důkazu Cauchyho věty.

**Tvrzení.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $\varphi(t)$ křivka v $\Omega$ a $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ spojitá funkce. Potom existuje posloupnost $\varphi_n(t)$ křivek v $\Omega$, které jsou po částech lineární a

$$\int_{\varphi_n} f(z)dz \to \int_{\varphi} f(z)dz, \qquad n \to \infty \tag{1}$$

*Důkaz.* Křivka $\varphi(t)$ je z definice po částech $C^1$, BÚNO je $C^1$ (jinak uvažujeme jednotlivé části zvlášť). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ budiž $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ dělení intervalu $[a, b]$ na $n$ stejných úseků délky $t_j - t_{j-1} = (b-a)/n$.
Křivku $\varphi_n(t)$ definujeme takto: v dělicích bodech klademe $\varphi_n(t_j) = \varphi(t_j)$, ve zbývajících úsecích dodefinujeme $\varphi_n(t)$ lineárně (správnější by bylo říci: afinně)

$$\varphi_n(t) = \varphi(t_j) + \left(\frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}\right) t, \qquad t \in (t_{j-1}, t_j) \tag{2}$$

Zřejmě $\varphi_n(t)$ je spojitá a $\varphi_n'(t) = \frac{\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}$ v intervalu $(t_{j-1}, t_j)$; v bodech $t_j$ obecně existují jen jednostranné derivace.
Klíčovým bodem důkazu je následující pozorování:

$$\varphi_n'(t) \rightrightarrows \varphi'(t) \quad \text{v } [a, b] \setminus N \tag{3}$$

kde $N$ je sjednocení všech dělicích bodů $t_j$ (přes všechna $n$). K důkazu (3) nechť je dáno $\varepsilon > 0$ libovolné. Protože $\varphi'(t)$ je spojitá na kompaktním intervalu $[a, b]$, je zde také stejnoměrně spojitá, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $|\varphi'(t) - \varphi'(s)| < \varepsilon$ pokud $|t-s| < \delta$. Nechť $n$ je tak velké, že $(b-a)/n < \delta$. Potom každé $t \in [a, b] \setminus N$ se nachází v nějakém intervalu $(t_{j-1}, t_j)$ a lze psát

$$\begin{aligned} \varphi_n'(t) &= \frac{\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(s) ds \\ &= \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(t) + \varphi'(s) - \varphi'(t) ds \\ &= \varphi'(t) + \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(s) - \varphi'(t) ds \end{aligned} \tag{4}$$

Avšak $|t - s| \leq t_j - t_{t-j} = (b-a)/n < \delta$, tedy poslední integrand a potažmo celý (průměrový) integrál je v absolutní hodnotě menší než $\varepsilon$, čímž je (3) dokázáno.

Z (3) plyne dále, že

$$\varphi_n(t) \rightrightarrows \varphi(t) \qquad \text{v } [a,b] \tag{5}$$

Stačí si uvědomit, opět pro $t \in (t_{j-1}, t_j)$, že

$$\begin{aligned}\varphi(t) - \varphi_n(t) &= \varphi(t_{j-1}) - \varphi_n(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t} \varphi'(s) - \varphi_n'(s) ds \\ &= 0 + \int_{t_{j-1}}^{t} \varphi'(s) - \varphi_n(s) ds\end{aligned}$$

a integrál lze odhadnout pomocí $(b-a)/n \cdot \sup_{s\in[a,b]\setminus N} |\varphi(s) - \varphi_n(s)|$, což jde do nuly nezávisle na $t$.
Nyní lze snadno dokončit důkaz (1). Jde o záměnu limity a integrálu pro

$$\int_a^b f(\varphi_n(t))\varphi_n'(t)dt \to \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{6}$$

Již víme, že integrandy konvergují bodově skoro všude. Funkce $\varphi'(t)$ je omezená díky spojitosti a je zřejmé (například z (4)), že $\varphi_n'(t)$ jsou omezené stejnou konstantou. Zbývá omezit funkce $f(\varphi_n(t))$.
Z tímto účelem budiž $P$ uzavřený pás o šířce $\epsilon$ kolem grafu $\varphi(t)$. Protože $P$ je kompaktní, je $f(z)$ na $P$ omezená nějakou konstantou. Na druhou stranu z (5) plyne, že pro dost velká $n$ leží grafy $\varphi_n(t)$ v $P$, a tedy příslušná konstanta odhaduje i funkce $f(\varphi_n(t))$. Přechod v (6) plyne tedy s Lebesgueovy věty (s konstantní majorantou). $\square$

Jako cvičení si lze rozmyslet, že pro délky křivek platí $L(\varphi_n) \nearrow L(\varphi)$, $n \to \infty$.