Důkaz Parsevalovy rovnosti.

Věta. Nechť $f \in L^2_{\text{per}}(0, 2\pi)$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2 \, dx = 0 \,. \tag{1}$$

Důkaz. 1. KROK. Nechť nejprve f je C^1 funkce. Podle Věty 21.2 je $\mathcal{F}_{f,n}(x) \to f(x)$ pro každé x.
Dle Věty 21.6 splňují Fourierovy koeficienty $|a_k| + |b_k| \le c/k^2$. Podle Weierstrassovy věty konverguje Fourierova řada stejnoměrně, (srovnej důkaz Věty 21.5). Tedy $\mathcal{F}_{f,n}(x) \rightrightarrows f(x)$, odtud $|\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2 \rightrightarrows 0$, a tedy (1) platí (viz Věta 15.2 v minulém semestru.)

2. KROK. Nechť $f \in L^2_{\text{per}}(0, 2\pi)$ je libovolná, $\varepsilon > 0$ dáno. Podle Věty o hustotě existuje C^1 funkce taková, že

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx < \varepsilon \,. \tag{2}$$

Díky nerovnosti $2ab \le a^2 + b^2$ máme

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \le 3(a^2 + b^2 + c^2) \,.$$

Tedy

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2 \, dx \\
&\le \int_0^{2\pi} \big(|\mathcal{F}_{f,n}(x) - \mathcal{F}_{g,n}(x)| + |\mathcal{F}_{g,n}(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|\big)^2 \, dx \\
&\le 3 \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - \mathcal{F}_{g,n}(x)|^2 + |\mathcal{F}_{g,n}(x) - g(x)|^2 + |g(x) - f(x)|^2 \, dx \\
&= 3(I_1 + I_2 + I_3) \,.
\end{aligned}$$

Zde $\mathcal{F}_{g,n}(x)$ značí n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce g.
Díky (2) je $I_3 < \varepsilon$. Podle KROKU 1 je $I_2 < \varepsilon$, pokud n je dost velké.
V důkaze Věty 21.4 jsme mimo jiné dokázali, že

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x)|^2 \, dx = \pi\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\Big) \le \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \,,$$

a tedy

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - \mathcal{F}_{g,n}(x)|^2 \, dx = \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f-g,n}(x)|^2 \, dx \le \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 \, dx \,.$$

Zde $\mathcal{F}_{f-g,n}(x)$ značí n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce $f-g$; použili jsme zřejmou identitu $\mathcal{F}_{f-g,n}(x) = \mathcal{F}_{f,n}(x) - \mathcal{F}_{g,n}(x)$.
Tudíž $I_1 < \varepsilon$ díky (2).

Celkem tedy

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2 \, dx \leq 9\varepsilon \, ,$$

pokud n je dost velké. Protože ε lze volit libovolné, důkaz (1) je hotov. $\square$