Vyčísleme

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} \mathrm{d}x$$

pomocí metod komplexní analysy.

Dvojím užitím identity

$$\sin^2 \xi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\xi)$$

obdržíme

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x).$$

Tento výraz lze již rozepsat ve tvaru komplexní exponenciely.

Integrujme tedy

$$\oint_\phi \frac{3 - 4\mathrm{e}^{2iz} + \mathrm{e}^{4iz}}{8z^2} \mathrm{d}z = \int F(z) \mathrm{d}z,$$

kde ϕ je křivka jdoucí po reálné ose a realisující "obskok" odstranitelné singilarity v bodě $z = 0$ (půlkružnicí $\varepsilon \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, \pi)$) s "velkou" půlkružnicí $R\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, \pi)$. Přes velkou půlkružnici integrál dle příslušného lemmatu či Lebesgueovy věty vymizí pro $R \to \infty$.

Tato křivka neobíhá žádná další residua; integrál $\oint_\phi F_z \mathrm{d}z = 0$ pro R libovolně velké, ε malé. Hledaný integrál přes reálný obor pak musí být roven integrálu přes malou půlkružinici.

Dosadíme-li výše uvedenou parametrisaci malé půlkružnice

$$\int_\phi \frac{3 - 4\mathrm{e}^{2iz} + \mathrm{e}^{4iz}}{8z} \mathrm{d}z = \int_0^\pi \frac{3 - 4\mathrm{e}^{2i\varepsilon \mathrm{e}^{it}} + \mathrm{e}^{4i\varepsilon \mathrm{e}^{it}}}{8\varepsilon^2 \mathrm{e}^{it}} i\varepsilon \mathrm{e}^{it} \mathrm{d}z,$$

lze užít Lebesgueovy věty (limita integrandu pro $\varepsilon \to 0+$ je konečná, pracujeme s měřitelnými funkcemi a integrál je z omezené funkce na omezeném intervalu, takže je majorisován konstantou.) Uplatněním L'Hospitalova pravidla a dosazením $\varepsilon = 0$ je integrál přes malou půlkružnici roven $\frac{1}{2}\pi$. Stejný výsledek obdržíme rovněž užitím lemmatu.

Z parity integrandu plyne, že hledaný integrál je roven polovině získané hodnoty.

Je tedy

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},$$

což je plně v souladu s *G. N.Berman*, př. 2448.