19. Křivkový integrál

značení
$$\underset{\sim}{x} = (x_1, \dots, x_n)$$
$$\underset{\sim}{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$
$$\underset{\sim}{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$
$$\|\underset{\sim}{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$
$$\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Def. Množina $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazve jednoduchá křivka, jestliže existuje funkce $\underset{\sim}{\varphi}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tak, že
$$\gamma = \underset{\sim}{\varphi}([a,b]) = \{ \underset{\sim}{\varphi}(t);\ t \in [a,b] \}$$ s těmito vlastnostmi

(i) $\underset{\sim}{\varphi}$ je spojité v $[a,b]$ a prosté (samo..)

(ii) $\underset{\sim}{\varphi}' = \frac{d}{dt}\underset{\sim}{\varphi}$ je spojité v (a,b) a $\underset{\sim}{\varphi}'(t) \neq \underset{\sim}{0}$ pro $\forall t \in (a,b)$

jednoduchá uzavřená křivka:

(i)' $\underset{\sim}{\varphi}$ spoj. v $[a,b]$, prosté v $[a,b)$ a $\underset{\sim}{\varphi}(a) = \underset{\sim}{\varphi}(b)$

Terminologie: $(\underset{\sim}{\varphi}, [a,b])$ ... parametrizace křivky

$\underset{\sim}{\varphi}(a)$, $\underset{\sim}{\varphi}(b)$ ... krajní body (pro neuzavřenou křivku)

Příklady ⓪ úsečka mezi $\underset{\sim}{\alpha} \neq \underset{\sim}{\beta} \in \mathbb{R}^n$

parametrizace: $\underset{\sim}{\varphi}(t) = \underset{\sim}{\alpha} + t(\underset{\sim}{\beta} - \underset{\sim}{\alpha})$; $t \in [0,1]$

① $\gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2+y^2)^{3/2} = 2xy\ ;\ x,y \geq 0 \}$

dobře se parametrizuje v polárních souřadnicích

$x = r\cos t$
$y = r\sin t$ pak $(r^2)^{3/2} = 2r^2 \cos t \sin t$
$r = \sin 2t$

parametrizace $\underset{\sim}{\varphi}(t) = (\sin 2t \cos t, \sin 2t \sin t)$ $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

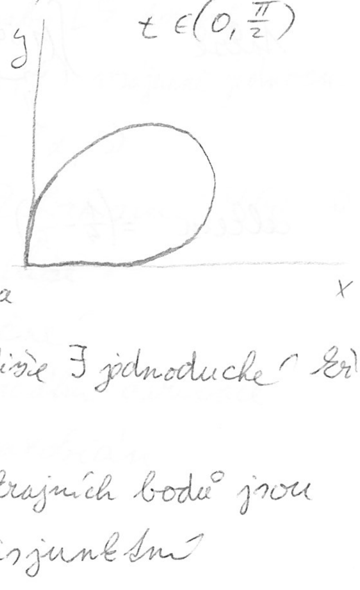
C^1: OK

$\underset{\sim}{\varphi}' \neq 0$

prosté v $[0, \frac{\pi}{2})$

není prosté v $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ jednoduchá uzavřená křivka

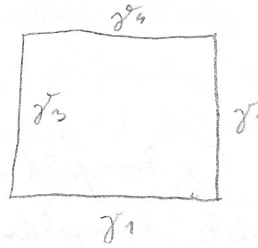


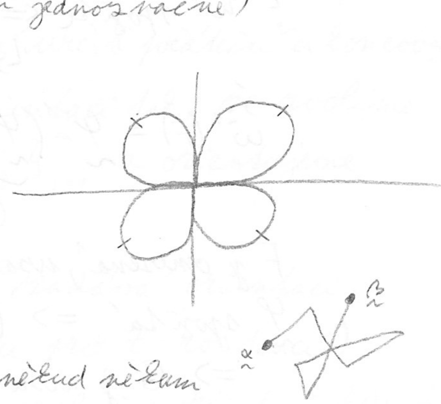
Def: $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ se nazve zobecněná křivka, jestliže $\exists$ jednoduché křivky γ_j, $j = 1, \dots, m$ tak, že (i) $\gamma = \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_j$

(ii) po vynechání krajních bodů jsou γ_j disjunktní

Terminologie $\{\gamma_j\}_{j=1}^{m}$ se nazývá přípustný rozklad γ (není určen jednoznačně)

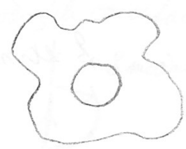
Příklad ① čtverec v R^2 ②





Poznámka: aplikace křivky — cesta od někud někam; hranice oblasti

\# zobecněná křivka nemusí být souvislá, např.



Definice. Nechť $\gamma \subset R^n$ je křivka a $f(x): \gamma \to R$ daná funkce. Integrál 1. druhu funkce f po křivce γ značíme $\int_\gamma f\,ds$ a je definován takto:

1. γ jednoduchá: $\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\varphi(t))\,\|\varphi'(t)\|\,dt$ kde $(\varphi, [a,b])$ je libovolná parametrizace γ

2. γ zobecněná: $\int_\gamma f\,ds := \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f\,ds$; kde $\{\gamma_j\}_{j=1}^{m}$ je libovolný přípustný rozklad γ

Lemma 19.1. Nechť $\gamma \subset R^n$ je jednoduchá (neuzavřená) křivka, Nechť $(\varphi(t), [a,b])$, $(\psi(\tau), [c,d])$ jsou dvě její parametrizace. Potom ex. $\omega(\tau): [c,d] \to [a,b]$ vzájemně jednoznačná, spojitá a navíc $\omega'(\tau)$ je spojitá, $\neq 0$ v (c,d) a platí $\psi(\tau) = \varphi(\omega(\tau))\ \forall \tau \in [c,d]$

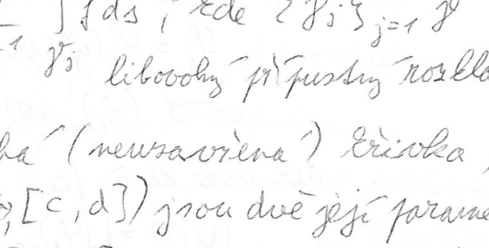
$$\int f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t))\,\|\varphi'(t)\|\,dt \xrightarrow{\text{subst. } t=\omega(\tau)} \int_c^d f(\varphi(\omega(\tau)))\,\|\varphi'(\omega(\tau))\|\cdot\omega'(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_c^d f(\psi(\tau))\,\|\psi'(\tau)\|\,d\tau = \int_\gamma f\,ds \text{ pomocí } \psi$$

$\psi(\tau) = \varphi(\omega(\tau))$

$\psi'(\tau) = \varphi'(\omega(\tau))\,\omega'(\tau)$

$\|\psi'(\tau)\| = \|\varphi'(\omega(\tau))\| \cdot |\omega'(\tau)|$



dk. definuji $\omega(\tau) := (\underset{\sim}{\varphi})_{-1}(\underset{\sim}{\psi}(\tau))$

ω je 1-1 (vzájemně jednoznačné), neboť φ, ψ jsou 1-1

? ω spojité $\iff F \subset [a,b]$ uzavř. $\Rightarrow \omega^{-1}(F)$ uzavř.

↳ věta 13.??

$$\omega^{-1}(F) = \underset{\sim}{\psi}^{-1}(\underbrace{\underset{\sim}{\varphi}(F)}_{G})$$

F je omezená, uzavřená v $\mathbb{R} \Rightarrow F$ je kompakt v $\mathbb{R}$

$\underset{\sim}{\varphi}$ spojitá $\Rightarrow G = \underset{\sim}{\varphi}(F)$ je také kompaktní

$\Rightarrow G$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$

$\underset{\sim}{\psi}$ spojité $\Rightarrow \underset{\sim}{\psi}^{-1}(G)$ je uzavř. v $\mathbb{R}$

? existenci derivace:

$\tau \in (c,d)$ pevné, libovolné

označme $\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\psi}(\tau) \in \gamma$

$t = \omega(\tau) \in (a,b)$

víme $\underset{\sim}{\varphi}'(t) \neq \underset{\sim}{0}$; BÚNO: $\varphi_1'(t) \neq 0$; nechť > 0

$\underset{\sim}{\varphi}'$ spojité $\Rightarrow \varphi_1' > 0$ na jistém $U(t) \subset (a,b)$

$\varphi_1 : U(t) \to \mathbb{R}$ je prosté (rostoucí)

tj. bod na γ je v okolí $\underset{\sim}{\alpha}$ určen jednoznačně 1. souřadnicí

lze psát: $\omega(\tau) = (\varphi_1)_{-1}(\psi_1(\tau))$

$\varphi_1 = \varphi_1(y)$ prostá, diferencovatelná $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\varphi_1)_{-1}'(z) = \frac{1}{\varphi_1'((\varphi_1)_{-1}(z))}$$

derivace slož. fce:

$$\omega'(\tau) = [(\varphi_1)_{-1}]'(\psi_1(\tau)) \cdot \psi_1'(\tau)$$

$$\forall \tau \in V = \omega^{-1}(U) = \frac{1}{(\varphi_1')((\varphi_1)_{-1}(\psi_1(\tau)))} \cdot \psi_1'(\tau)$$

? $\omega'(\tau) \neq 0$: sporem $\quad \underset{\sim}{\psi}(\tau) = \underset{\sim}{\varphi}(\omega(\tau)) \quad \Big/ \frac{d}{dt}$

$$\underset{\sim}{\psi}'(\tau) = \underset{\sim}{\varphi}'(\omega(\tau))\,\omega'(\tau) \quad \forall \tau \in (c,d)$$

$$\omega'(\tau) = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{\psi}'(\tau) = \underset{\sim}{0} \text{ spor.}$$

↑ parametrizace

Důsledek: Věta 19.1.: Křivkový integrál 1. druhu nezávisí na parametrizaci

$\gamma \subset \mathbb{R}^n$ křivka ; $f(\underset{\sim}{x}) : \gamma \to \mathbb{R}$

$\int_\gamma f\,ds = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f\,ds$	$\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\underset{\sim}{\varphi}(t))\,\lVert \underset{\sim}{\varphi}'(t)\rVert\,dt$
$\gamma = \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_j$ zobecněná	γ jednoduchá

Def. [Orientace křivky]

Jednoduchá křivka je orientovaná, je-li určen směr probíhání. Pro neuzavřenou křivku to znamená určit počáteční a koncový bod. U zobecněné křivky stanovíme orientaci tak, že zvolíme nějaký přípustný rozklad $\{\gamma_j\}_{j=1}^{m}$ a orientujeme (jednoduché) křivky γ_j.

Poznámky: (1) parametrizace přirozeně zadává orientaci (probíhání křivkou pro t rostoucí)

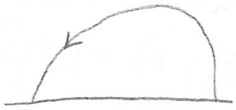
parametrizace je / není ve shodě s orientací křivky

(2) zobecněná křivka: rozklad na m křivek $\Rightarrow 2^m$ možných orientací


$\rightarrow$ 8 možností

Příklad: $\gamma = \{x^2+y^2=1\} \cap \{y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$

orientace $\circlearrowleft$



parametrizace

$\cancel{\varphi(t) = \sqrt{1-t}}$

$\varphi(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ $t \in [-1,1]$ NENÍ ve shodě s orientací

$\psi(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau)$ $\tau \in [0,\pi]$ JE ve shodě s orientací

Pozn. k L. 19.1.: $\omega(\tau) = \cos(\tau)$

Dodatek k Lemmatu 19.1. $\omega'(\tau) > 0$ (resp. $\omega'(\tau) < 0$) v (c,d), jestliže $(\varphi, [a,b])$, $(\psi, [c,d])$ vyjadřují stejnou (resp. opačnou) orientaci.

dk. ω spoj., $\omega' \neq 0 \Rightarrow$ buď (i) $\omega' > 0$ v (c,d) … ω rostoucí

nebo (ii) $\omega' < 0$ v (c,d) … ω klesající

neboť ω má Darbouxovu vlastnost

$$\underset{\underset{[c,d]}{\uparrow}}{\psi(\tau)} = \varphi(\underset{\underset{t \in [a,b]}{\parallel}}{\omega(\tau)})$$

Def. Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná křivka

$F(x): \gamma \to \mathbb{R}^n$ vektorová funkce

Integrál 2. druhu fce F podél křivky γ značíme $\int_\gamma F \cdot ds$

a definujeme 1. γ jednoduchá: $\int_\gamma F \cdot ds := \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$, kde $(\varphi, [a,b])$ je libovolná parametrizace ve shodě s orientací γ

2. γ zobecněná: $\int_\gamma F \cdot ds := \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} F \cdot ds$; kde $\{\gamma_j\}_{j=1}^{m}$ je rozklad určující orientaci

„orientovaný rozklad"

Jiné značení: $\underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = F_1 dx + F_2 dy \; (+F_3 dz)$ v $\mathbb{R}^2 (\mathbb{R}^3)$

Věta 19.2. Integrál 2. druhu nezávisí na parametrizaci, je-li ve shodě s orientací. (Pokud ne, vyjde s opačným znaménkem)

dk. γ ... jednoduchá; $(\underset{\sim}{\varphi}(t); [a,b])$, $(\psi(\tau), [c,d])$ parametrizace (neuzavř.)

$$\int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \int_a^b \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{\varphi}(t)) \cdot \underset{\sim}{\varphi}'(t)\, dt \quad \Big| \text{ subst. } t = \omega(\tau) \text{ (viz § 19.1.)}$$

$\hookrightarrow$ pomocí $\underset{\sim}{\varphi}$

$$= \int_c^d \underbrace{\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{\varphi}(\omega(\tau)))}_{\underset{\sim}{\psi}(\tau)} \cdot \underbrace{\underset{\sim}{\varphi}'(\omega(\tau))\, |\omega'(\tau)|}_{\pm \psi'(\tau)}\, d\tau \qquad \begin{array}{l}\psi = \varphi \circ \omega \\ \psi' = \varphi' \circ \omega \cdot \omega'\end{array}$$

; kde $+/-$ ... ω roste/klesá

$$= \pm \int_c^d \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{\psi}(\tau)) \cdot \psi'(\tau)\, d\tau = \pm \int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s}$$

$\hookrightarrow$ pomocí $\underset{\sim}{\psi}$

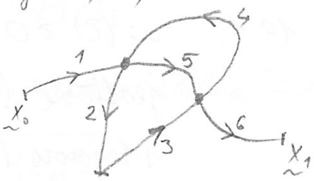
... φ, ψ vyjadřují stejnou/opačnou orientaci

Def. Řekneme, že orientovaná zobecněná křivka γ spojuje body $\underset{\sim}{X}_0; \underset{\sim}{X}_1 \in \mathbb{R}^n$ (jde od X_0 do $\underset{\sim}{X}_1$), jestliže γ je určena orientovaným rozkladem $\{\gamma_j\}_{j=1}^m$; γ_j jednoduché a splňují:

(i) p. b. $\gamma_1 = \underset{\sim}{X}_0$ (počát. bod)

(ii) k. b. γ_j = p. b. γ_{j+1}; $j = 1, \dots, m-1$

(iii) k. b. $\gamma_m = \underset{\sim}{X}_1$



Pokud $\underset{\sim}{X}_0 = \underset{\sim}{X}_1$ jde o zobecněnou uzavřenou křivku

Def. $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazve křivkově souvislá, pokud pro $\forall\, \underset{\sim}{X}_0, \underset{\sim}{X}_1 \in M$ existuje (zob.) křivka $\gamma \subset M$, spojující $\underset{\sim}{X}_0, \underset{\sim}{X}_1$

Otevřená, křivkově souvislá množina se nazývá oblast

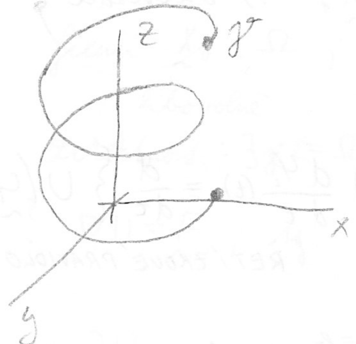
Příkl. ① M konvexní $\Rightarrow$ M křivkově souvislá

② $\mathbb{R}^2 \setminus p$; p ... polopřímka : nekonvexní, křivkově souvislá

③ $\mathbb{R}^2 \setminus q$; q ... přímka : nesouvislá

④ $\mathbb{R}^3 \setminus q$; q ... přímka : křivkově souvislá

Příklad: ① délka šroubovice



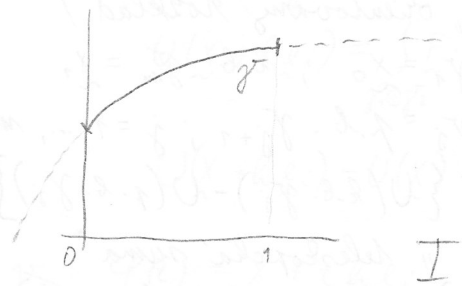
$$\underset{\sim}{\varphi}(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{2\pi}\right); \quad t \in [0, 4\pi]$$

$$\underset{\sim}{\varphi}'(t) = \left(-\sin t, \cos t, \frac{1}{2\pi}\right)$$

$$\|\underset{\sim}{\varphi}'\|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{4\pi^2} = 1 + \frac{1}{4\pi^2}$$

$$\int_\gamma 1\, ds = \int_0^{4\pi} \|\underset{\sim}{\varphi}'(t)\|\, dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}}\, dt = 4\pi\sqrt{1+\frac{1}{4\pi^2}}$$

② $\int_\gamma x\,dy - y\,dx$; γ … graf funkce $g(x) = \sqrt{1+x}$ orientovaný od $x=1$ do $x=0$



$$\underset{\sim}{\varphi}(t) = (t, \sqrt{1+t}); \quad t \in [0,1]$$

$$\underset{\sim}{\varphi}'(t) = \left(1; \frac{1}{2\sqrt{1+t}}\right)$$

$$I = \int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s}; \quad d\underset{\sim}{s} = (dx, dy)$$

$$\underset{\sim}{F} = (-y, x)$$

$$I = \int_0^1 \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{\varphi}(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_0^1 (-\sqrt{1+t}, t) \cdot \Big(\underbrace{1}_{dx}, \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1+t}}}_{dy}\Big)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{2\sqrt{1+t}} - \sqrt{1+t}\, dt \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+t} = y \\ t = y^2 - 1 \\ dt = 2y\,dy \\ y \in (1, \sqrt{2}) \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{y^2-1}{2y} - y\right) 2y\, dy \overset{(*)}{=} \frac{1}{3}(4 - 5\sqrt{2})$$

(*) protože parametrizace není ve shodě s orientací křivky, výsledek bude s opačným znaménkem

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevř., $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}): \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorová funkce

Funkce $U(x): \Omega \to \mathbb{R}$ se nazve potenciál $\underset{\sim}{F}$ v Ω, jestliže

$\nabla U(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) \ \forall\, x \in \Omega$; po složkách: $\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$ v Ω

Lemma 16.2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast; $\underset{\sim}{F}(x): \Omega \to \mathbb{R}^n$

Nechť $U(\underset{\sim}{x})$ je potenciál $\underset{\sim}{F}(x)$ v Ω

Nechť $\underset{\sim}{x}_0, \underset{\sim}{x}_1 \in \Omega$; $\gamma \subset \Omega$ je libovolná křivka jdoucí od $\underset{\sim}{x}_0$ do $\underset{\sim}{x}_1$

Potom

$$\int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = U(\underset{\sim}{x}_1) - U(\underset{\sim}{x}_0)$$

dk. (i) γ jednoduchá; $(\underset{\sim}{\varphi}(t), [a,b])$ ... parametrizace ve shodě s orientací
$\underset{\sim}{\varphi}(a) = \underset{\sim}{x}_0$, $\underset{\sim}{\varphi}(b) = \underset{\sim}{x}_1$

$$\int_\gamma \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{s} = \int_a^b \underbrace{\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{\varphi}(t))\cdot \underset{\sim}{\varphi}'(t)}_{(*)}\, dt \overset{\text{II}}{=}$$

$$(*)\ \sum_{i=1}^n \underbrace{F_i(\underset{\sim}{\varphi}(t))}_{\frac{\partial U}{\partial x_i}(\underset{\sim}{\varphi}(t))}\varphi_i'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i}(\underset{\sim}{\varphi}(t))\,\frac{d\varphi_i}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\left\{U(\underset{\sim}{\varphi}(t))\right\}$$

ŘETÍZKOVÉ PRAVIDLO

$$\overset{\text{II}}{=} \int_a^b \left\{U(\underset{\sim}{\varphi}(t))\right\}' dt = \left[U(\underset{\sim}{\varphi}(t))\right]_{t=a}^{t=b} = U(\underbrace{\underset{\sim}{\varphi}(b)}_{=\underset{\sim}{x}_1}) - U(\underbrace{\underset{\sim}{\varphi}(a)}_{=\underset{\sim}{x}_0})$$

(ii) obecně: $\gamma = \bigcup_{j=1}^m \gamma_j$ („orientovaný rozklad")
p.b. $\gamma_1 = \underset{\sim}{x}_0$, k.b. $\gamma_m = \underset{\sim}{x}_1$
k.b. γ_j = p.b. γ_{j+1}; $j = 1, \dots, m-1$

$$\int_\gamma \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{s} = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{s} \overset{(i)}{=} \sum_{j=1}^m \left\{U(\text{k.b. }\gamma_j) - U(\text{p.b. }\gamma_j)\right\} =$$

„teleskopická suma"

$$= \cancel{U(\text{k.b. }\gamma_1)} - U(\text{p.b. }\gamma_1) + U(\text{k.b. }\gamma_2) - \cancel{U(\text{p.b. }\gamma_2)} + \dots =$$
$$= U(\underbrace{\text{k.b. }\gamma_m}_{\underset{\sim}{x}_1}) - U(\underbrace{\text{p.b. }\gamma_1}_{\underset{\sim}{x}_0})$$

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že integrál z $\underset{\sim}{F}$ nezávisí v Ω na cestě, jestliže pro libovolné $\underset{\sim}{x}_0, \underset{\sim}{x}_1 \in \Omega$ a libovolné křivky $\gamma, \hat{\gamma} \subset \Omega$ jdoucí od $\underset{\sim}{x}_0$ do $\underset{\sim}{x}_1$ platí

$$\int_\gamma \underset{\sim}{F}\cdot d s = \int_{\hat{\gamma}} F\cdot d s$$

→ se stříškou

Věta 19.3. [O potenciálu]
Nechť $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}): \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá.
Potom je ekvivalentní
(1) $\underset{\sim}{F}$ má v Ω potenciál
(2) integrál z $\underset{\sim}{F}$ nezávisí v Ω na cestě

dk. (1)⇒(2) nechť U je potenciál $\underset{\sim}{F}$; $\underset{\sim}{x}_0, \underset{\sim}{x}_1 \in \Omega$, γ jde od $\underset{\sim}{x}_0$ do $\underset{\sim}{x}_1$ libovolně
L.19.2. $\int_\gamma \underset{\sim}{F}\cdot d\underset{\sim}{s} = U(\underset{\sim}{x}_1) - U(\underset{\sim}{x}_0)$ ... nezávisí na γ

$(2) \Rightarrow (1)$ víme int. nezávisí na cestě

cíl $\exists U;\ \nabla U = \underset{\sim}{F}$ v Ω

fixuji $\underset{\sim}{X}_0 \in \Omega$ libovolně ; položíme $U(\underset{\sim}{X}) := \begin{cases} 0 \\ \int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot ds \ ;\ \underset{\sim}{X} \neq \underset{\sim}{X}_0 ;\ \gamma \subset \Omega \text{ lib. křivka jdoucí od } \underset{\sim}{X}_0 \text{ do } \underset{\sim}{X}_1 \end{cases}$

korektnost: $\exists \gamma \subseteq \Omega$ oblast, dle (2) int. nezáv. na γ

$\overset{?}{:} \nabla U = \underset{\sim}{F}$; tj. $\frac{\partial U}{\partial x_i}(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{X})$; $\underset{\sim}{X} \in \Omega$, $i \in \{1,\dots,n\}$ fixuji

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\underset{\sim}{X}) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{1}{h}\left[U(\underset{\sim}{X} + h\underset{\sim}{e}_i) - U(\underset{\sim}{X})\right]}_{Q(h)} \qquad \underset{\sim}{e}_i = (0,\dots,\underset{i}{1},0,\dots,0)$$

$$U(\underset{\sim}{X}) = \int_{\gamma_1} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s}$$

$$U(\underset{\sim}{X} + h\underset{\sim}{e}_i) = \int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \int_{\gamma_1} \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} + \int_{\gamma_2} \underset{\sim}{F} \cdot ds$$

$$U(\underset{\sim}{X} + h\underset{\sim}{e}_i) - U(\underset{\sim}{X}) = \int_{\gamma_2} \underset{\sim}{F} \cdot ds = \int_0^1 \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{X} + th\underset{\sim}{e}_i) \cdot h\,\underset{\sim}{e}_i\, dt$$

$\gamma_2 : \underset{\sim}{\varphi}(t) = \underset{\sim}{X} + th\underset{\sim}{e}_i$; $t \in [0,1]$

$\underset{\sim}{\varphi}'(t) = h\underset{\sim}{e}_i$

$$Q(h) = \int_0^1 F_i(\underset{\sim}{X} + th\underset{\sim}{e}_i)\,dt \quad ;\ h \to 0$$

$$\Big\downarrow (*)$$

$$\int_0^1 F_i(\underset{\sim}{X})\,dt = F_i(\underset{\sim}{X})$$

ověření $(*)$: Lebesgue : $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{X})$ spojitá $\Rightarrow |\underset{\sim}{F}(y)| \le K$; $y \in \mathcal{U}(\underset{\sim}{X}, \delta)$

$|h| < \delta \Rightarrow \underset{\sim}{X} + th\underset{\sim}{e}_i \in \mathcal{U}(\underset{\sim}{X}, \delta)$

majoranta $g(t) = K \in \mathcal{L}(0,1)$

Poznámka: integrál z $\underset{\sim}{F}$ nezávisí v Ω na cestě

$\Leftrightarrow \int_\omega \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = 0$ pro $\forall \omega \subset \Omega$ zobecněná uzavřená křivka

Def. $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ jednoduchá křivka ; $\underset{\sim}{X}$ není krajní bod

Tečný vektor γ v bodě $\underset{\sim}{X}$ definujeme jako

$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{X}) := \frac{\underset{\sim}{\varphi}'(t)}{\|\underset{\sim}{\varphi}'(t)\|}$; kde $(\underset{\sim}{\varphi}, [a,b])$ je libovolná parametrizace, $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\varphi}(t)$

Pozn. ? nezávislost na parametrizaci : $(\underset{\sim}{\psi}, [c,d])$, $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{X}) = \frac{\underset{\sim}{\psi}'(\tau)}{\|\underset{\sim}{\psi}'(\tau)\|} = \frac{\underset{\sim}{\varphi}'(\omega(\tau))\,\omega'(\tau)}{\|\underset{\sim}{\varphi}'(\omega(\tau))\,\omega'(\tau)\|} = (*)$

L. 19.1. : $\exists \omega : [c,d] \to [a,b]$; $\underset{\sim}{\psi}(\tau) = \underset{\sim}{\varphi}(\omega(\tau))$; $\underset{\sim}{\psi}'(\tau) = \underset{\sim}{\varphi}'(\omega(\tau))\,\omega'(\tau)$

$(*) = \frac{\underset{\sim}{\varphi}'(t)}{\|\underset{\sim}{\varphi}'(t)\|} \cdot \frac{\omega'(\tau)}{|\omega'(\tau)|} \Rightarrow \pm 1 \Longrightarrow$ AŽ NA ZNAMÉNKO

Věta 19.4 [Vztah mezi integrály 1. a 2. druhu]

Nechť $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ je orientovaná křivka; $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) : \gamma \to \mathbb{R}^n$

Potom $\int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \int_\gamma (\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{T})\, ds$; kde $T(x) : \gamma \to \mathbb{R}^n$ je tečný vektor volený ve shodě s orientací γ

dk. $f(\underset{\sim}{x}) := \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x})$; BÚNO: γ jednoduchá

$f : \gamma \to \mathbb{R}$ $\qquad (\underset{\sim}{\varphi}(t), [a,b])$ parametrizace ve shodě s orientací γ

PS: $\underbrace{\int_\gamma f\, ds}_{1.\text{ druhu}} = \int_a^b f(\underset{\sim}{\varphi}(t)) \|\varphi'(t)\|\, dt$

$f(\underset{\sim}{\varphi}(t)) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{\varphi}(t)) \cdot T(\underset{\sim}{\varphi}(t))$

$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{\varphi}(t)) = \oplus \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$ → protože je ve shodě

$= \int_a^b \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{\varphi}(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = LS$

→ definice + shoda s orientací

Důsledek Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $U, V : \Omega \to \mathbb{R}$ jsou C^1 funkce

Nechť $\nabla U = \nabla V$ v Ω.

Potom $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tak, že $U(\underset{\sim}{x}) = V(\underset{\sim}{x}) + c \quad \forall\, x \in \Omega$

dk. $W(\underset{\sim}{x}) := U(\underset{\sim}{x}) - V(\underset{\sim}{x})$; $\underset{\sim}{x} \in \Omega$ vol $\underset{\sim}{x}_0 \in \Omega$ libovolně

$\underset{\sim}{F} := \nabla W = \nabla U - \nabla V \equiv 0$ v Ω označ $c := W(x_0)$

$x_1 \in \Omega$ ... $\exists$ kř. $\gamma \subset \Omega$ jdoucí od $\underset{\sim}{x}_0$ do $\underset{\sim}{x}_1$

L 19.2. $\to W(\underset{\sim}{x}_1) - W(\underset{\sim}{x}_0) = \int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \int_\gamma \underset{\sim}{0} \cdot d\underset{\sim}{s} = 0$

Poznámka: zbytek kapitoly: situace v $\mathbb{R}^2$

Def. $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ křivka; $\underset{\sim}{x} \in \gamma$. Definujeme $\underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{x})$ (normálový vektor k γ v bodě $\underset{\sim}{x}$) jakožto jednotkový vektor, kolmý na $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x})$.

- je definován až na znaménko
- není definován v krajních / spojovacích bodech

Poznámka: vektor kolmý na $\underset{\sim}{u} = (\alpha, \beta)$: $(-\beta, \alpha)$ $\circlearrowleft +90°$; $(\beta, -\alpha)$ $\circlearrowright -90°$

$(\alpha + i\beta) i = -\beta + i\alpha$

Def: $\underset{\sim}{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad$ divergence $\operatorname{div} \underset{\sim}{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$

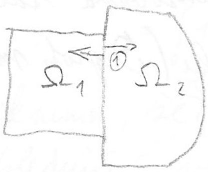
rotace $\operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$

Věta 19.5. [Gauss]

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je „rozumná" oblast, $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je C^1 na okolí $\overline{\Omega}$, nechť $\partial\Omega$ je zobecněná křivka.

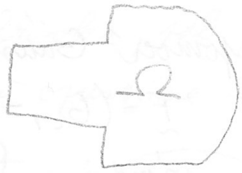
Potom $\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{n}\, ds$; kde $\underset{\sim}{n}$ je normála k $\partial\Omega$, směřující ven z Ω

dk. 1. skládankovitý charakter věty // vnější normála



$$\left.\begin{array}{l} \text{Gauss pro } \Omega_1: \displaystyle\int_{\Omega_1} \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega_1} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{n}\, ds \\ \text{Gauss pro } \Omega_2: \displaystyle\int_{\Omega} \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega_2} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{n}\, ds \end{array}\right\} (+)$$

$$(+) \quad \int_\Omega \operatorname{div} \underset{\sim}{F}\, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{n}\, ds$$



(1) integrály s různým směrem se odečtou

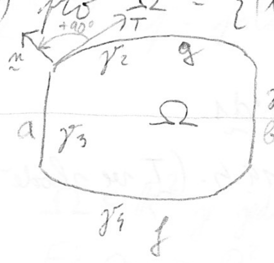
• (+) funguje pro sjednocení, rozdíl, ...

2. stačí důkaz „po složkách":

$$\int_\Omega \frac{\partial F_1}{\partial x}\, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega} F_1 n_1\, ds \quad ; \quad \boxed{\int_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial y}\, d\lambda_2 = \int_{\partial\Omega} F_2 n_2\, ds \quad (*)}$$

$\underset{\sim}{n} = (n_1, n_2)$ vnější normála

3. (*) pro $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ a < x < b ;\ f(x) < y < g(x)\}$; $f, g \in C^1$ fce



$$\text{l. s. } (*): \int_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial y}\, d\lambda_2 \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \Bigg(\underbrace{\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)\, dy}_{\left[F_2(x,y)\right]_{y=f(x)}^{y=g(x)}} \Bigg) dx =$$

$$= \int_a^b F_2(x, g(x)) - F_2(x, f(x))\, dx$$

p. s. : $\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

γ_1, γ_3 : $\tilde{n} = (\pm 1, 0)$ ... $\displaystyle\int_{\gamma_{1,3}} F_2 \overbrace{n_2}^{=0} ds = 0$

γ_2 : param : $\varphi(t) = (t, g(t))$
$\varphi'(t) = (1, g'(t))$

$$\int_{\gamma_2} F_2 n_2\, ds = \int_a^b F_2(\underset{\sim}{\varphi}(t))\, n_2(\underset{\sim}{\varphi}(t)) \cdot \|\varphi'(t)\|\, dt = \int_a^b F_2(t, g(t)) \cdot \frac{1}{\sqrt{\ }} \cdot \underset{\sqrt{1+(g')^2}}{\sqrt{\ }}\, dt = \int_a^b F_2(t, g(t))\, dt$$

tečna : $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{\varphi}(t)) = \dfrac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$

normála : $\underset{\sim}{n}(\underset{\sim}{\varphi}(t)) = \dfrac{\oplus(-g'(t), 1)}{\sqrt{1+(g'(t))^2}}$

analogicky: $\int\limits_{\gamma_4} F_2 n_2 \, ds = -\int\limits_a^b F_2(t, g(t))\, dt$

rozumná oblast: konečné sjednocení / rozdíl množin z bodu 3

Věta 19.6. [Green]

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je „rozumná" oblast; $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je C^1 na okolí $\overline{\Omega}$.

Nechť $\partial\Omega$ je zobecněná křivka, orientovaná tak, že obíhá kolem Ω v kladném smyslu (↺ proti směru hod. ručiček)

Potom $\int\limits_\Omega \operatorname{rot} G \, d\lambda_2 = \int\limits_{\partial\Omega} G \cdot ds$

dk. pomocí Gaussovy věty:

$F = (G_2, -G_1)$; kde $G = (G_1, G_2)$

víme: $\int\limits_\Omega \operatorname{div} F \, d\lambda_2 = \int\limits_{\partial\Omega} F \cdot n \, ds$; n vnější normála

l.s. $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = \operatorname{rot} G$

p.s.

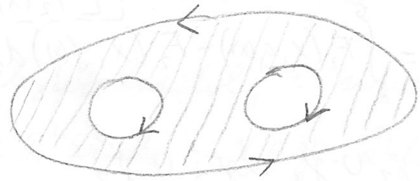
$n = (T_2, -T_1)$

$F \cdot n = F_1 n_1 + F_2 n_2$
$= G_2 T_2 + (-G_1)(-T_1)$
$= G \cdot T$

p.s. $\int\limits_{\partial\Omega} F \cdot n \, ds = \int\limits_{\partial\Omega} G \cdot T \, ds = \int\limits_{\partial\Omega} G \cdot ds$

↳ v 19.4. (T ve shodě s orientací)

Poznámka:



kladná orientace hranice

Lemma 19.3. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, $F: \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1

Nechť F má v Ω potenciál

Pak $\operatorname{rot} F = 0$ v Ω

dk. nechť $\nabla U = F$; tj: $F_1 = \frac{\partial U}{\partial x}$, $F_2 = \frac{\partial U}{\partial y}$

$F \in C^1 \Rightarrow U \in C^2$

$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0$ (záměna parc. derivací)

Poznámka: ?? $F \in C^1(\Omega)$; $\operatorname{rot} F = 0 \Rightarrow F$ má potenciál

NE VŽDY!! (závisí na Ω)

Příklad: $\underset{\sim}{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \in C^1(\Omega)$; $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\underset{\sim}{0}\}$

$\operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = 0$

sporem: $\exists\, U : \Omega \to \mathbb{R}$; $\nabla U = \underset{\sim}{F}$

$\to \int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot ds = 0$; $\forall \gamma \subset \Omega$ uzavřená křivka

γ: kružnice $\underset{\sim}{\varphi}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \int_0^{2\pi} \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{\varphi}(t)) \cdot \underset{\sim}{\varphi}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{-\|-}\right) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$$

Def: Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá, má-li následující vlastnost:

je-li $\gamma \subset \Omega$ jednoduchá uzavřená křivka, pak γ lze spojitě stáhnout do bodu, aniž opustíme Ω.

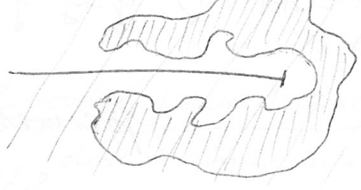
Ekvivalentně: „vnitřek" γ je částí Ω

Přík. ① $B = \{x^2 + y^2 < 1\}$ je jedn. souvislá

obecně, každá konvexní množina

② $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus B$ NENÍ jednoduše souvislá

③ $\mathbb{R}^2 \setminus p$ - polopřímka: JE jedn. souvislá



Věta 19.7. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá,

$\underset{\sim}{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je C^1, $\operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = 0$ v Ω

Potom $\underset{\sim}{F}$ má v Ω potenciál.

dk. stačí ukázat $\int_\omega \underset{\sim}{F} \cdot ds = 0$ $\forall \omega$ .. jednoduchá, uzavř. křivka v Ω

označ M .. „vnitřek" ω : $\Rightarrow M \cup \omega \subset \Omega$; aplikace (oblast, kterou ω obíhá) Greenovy věty:

$F \in C^1(\Omega)$; $\Omega \supset \overline{M} = M \cup \underset{\sim}{\partial M}$, $\partial M = \cancel{\gamma} = \omega$

$$\pm \int_\omega \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{s} = \int_M \underbrace{\operatorname{rot} \underset{\sim}{F}}_{=0}\, d\lambda_2$$

Přík. $F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \in C^1(\Omega)$; $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \underset{\sim}{0}$, $\operatorname{rot} \underset{\sim}{F} = 0$; leč $\underset{\sim}{F}$ nemá v Ω potenciál

$\int_\gamma \underset{\sim}{F} \cdot ds$ = přírůstek úhlu mezi p. b. γ a k. b. γ

ale $\exists$ potenciál na $\forall\, \hat{\Omega} \subset \Omega$; $\hat{\Omega}$ jedn. souvislá