18. Lebesgueův integrál

$f(x): M \to R$ cíl $\int_M f\,d\lambda$

$M \subset R^n$ měřitelná

očekáváme vlastnosti:

linearita integrálu: $\int_M f+g\,d\lambda = \int_M f\,d\lambda + \int_M g\,d\lambda$

zachování nerovností: $f \le g \Rightarrow \int_M f\,d\lambda \le \int_M g\,d\lambda$

limitní přechody: $f_k \to f \Rightarrow \int_M f_k\,d\lambda \to \int_M f\,d\lambda$

$$\frac{d}{da}\int_M f(x,a)\,dx = \int_M \frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\,dx$$

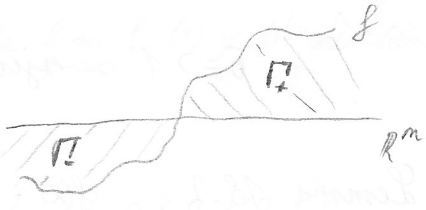
názorný význam:

$M \subset R^n$ $\int_M f\,d\lambda_n = \lambda_{n+1}(\Gamma_+) - \lambda_{n+1}(\Gamma_-)$

$\Gamma_+ := \{(\underset{\sim}{x},y)\in R^{n+1};\ x\in M,\ 0<y<f(\underset{\sim}{x})\}$

$\Gamma_- := \{(\underset{\sim}{x},y)\in R^{n+1};\ x\in M;\ f(x)<y<0\}$

- „objem" pod grafem funkce



Def.: $f(x): M \to R$ se nazve měřitelná, jestliže pro $\forall c \in R$ je $\{x\in M;\ f(x)>c\}$ měřitelná množina.

Lemma 18.1. $f(x): M \to R$, M měřitelná

Potom je ekvivalentní:

1. f je měřitelná
2. $\forall c\in R \dots \{f \ge c\} \in \mathfrak{M}$
3. $\forall c \in R \dots \{f < c\} \in \mathfrak{M}$ nebo $\forall c\in R \dots \{f \le c\} \in \mathfrak{M}$
4. $\forall I \subset R$ interval $\dots \{f\in I\} \in \mathfrak{M}$
5. $\forall G \subset R$ otevřená $\dots \{f \in G\} \in \mathfrak{M}$

značení: $\{f\in I\} = \{x\in M;\ f(x)\in I\}$

dk. $1 \Rightarrow 2$ $\{f \geq c\} = \bigcap_j \{f > c - \frac{1}{j}\}$

$\subseteq$ jasné

$\supseteq$: $x \notin LS \Rightarrow x \notin PS$

$f(x) < c$ vol $j \in N$ ... $f(x) < c - \frac{1}{j}$

$x \notin PS$

$2 \Rightarrow 1$ $\{f > c\} = \bigcup_{j \in N} \{f \geq c + \frac{1}{j}\}$

↳ měřitelné }
↳ spočetné sjednocení }

$1 \Leftrightarrow 3$ $\{f \leq c\} = M \setminus \{f > c\}$

měř.

$4 \Rightarrow 1$ zjevné, polož $I = (c, \infty)$

$(1 \Rightarrow 2,3) \Rightarrow 4$ ... I lze najít jako průnik (dvou) neomezených intervalů

$\{f \in (0,1]\} = \{f > 0\} \cap \{f \leq 1\}$

$4 \Rightarrow 5$ $G \subset \mathbb{R}$ otevřená, $G = \bigcup_{j \in N} I_j$; I_j .. vhodné otevřené intervaly

$\{f \in G\} = \bigcup_j \{f \in I_j\}$ ... spočetné sjednocení

$\in m$ dle 4

$5 \Rightarrow 1$: zjevné $G = (c, \infty)$ ... otevřená množina

Lemma 18.2. $f(x) : M \to \mathbb{R}$; $M \subset \mathbb{R}^n$, měřitelná

Nechť $M = G \cup N$, kde G je otevřená (v $\mathbb{R}^n$),

f spojitá v G a N je míry nula

Potom f je měřitelná

dk. cíl: $\{x \in M ; f(x) > c\} \in m$ pro $\forall c \in \mathbb{R}$

$\{x \in G, f(x) > c\} \cup \{x \in N, f(x) > c\}$

↑ otevřená : vzor (c, ∞) při spojitém f } V 17.5. $\Rightarrow$ měřitelná

$\subseteq N$ ... nulová (a tedy měřitelná) V 17.5.

Příklad: $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$; spojitá s vyjímkou bodů $x_1 < x_2 < \dots < x_N$

$\to$ měřitelná : $N = \{x_1, \dots, x_N\}$

$G = (a, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_N, b)$

Lemma 18.3. $f: M \to \mathbb{R}$ měřitelná; $f(M) \subset G$ ... otevřená (v $\mathbb{R}$)

$\varphi: G \to \mathbb{R}$ spojitá

Potom $\varphi \circ f$ je měřitelná

dk.: cíl: $\{x \in M, (\varphi \circ f)(x) > c\} \in \mathfrak{M}$

$$\begin{tikzcd} \{x \in M, (\varphi \circ f)(x) > c\} \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\ \{f \in \varphi^{-1}((c,\infty))\} \end{tikzcd}$$

$(\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$

$\hookrightarrow$ otevřená (spojitost φ)

$\hookrightarrow \in \mathfrak{M}$, L.18.1.

Poznámka: $(f \circ \varphi)$, f měř., φ spoj obecně není měřitelná

Věta 18.1. [Zachování měřitelnosti]

Nechť $f, g, f_j: M \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné; M je měřitelná

Potom 1. $f+g$; $f-g$; αf; fg jsou měřitelné;
f/g měřitelná na $\{g \neq 0\}$

2. $\max\{f,g\}$; $\min\{f,g\}$; f^+; f^-; $|f|$ jsou měřitelné

3. $\sup_j f_j$; $\inf_j f_j$ jsou měřitelné

Pokud existuje bodová limita $\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ je též měřitelná

dk. αf: $\{\alpha f > c\} = \{f > c\alpha^{-1}\}$ $\alpha > 0$

$\alpha \neq 0$ $\qquad \searrow \{f < c\alpha^{-1}\}$ $\alpha < 0$

$f+g$: tvrdíme: $\{f+g > c\} = \bigcup\limits_{\substack{p,q \in \mathbb{Q} \\ p+q > c}} (\underbrace{\{f > p\} \cap \{g > q\}}_{\in \mathfrak{M}})$

spočetné sjednocení

„$\supseteq$" zjevné

„$\subseteq$": $x \in \{f+g > c\}$ ... $f(x) + g(x) = \gamma > c$;

tj. $\gamma = c + \varepsilon$; $\varepsilon > 0$

volme $p, q \in \mathbb{Q}$: $f(x) > p > f(x) - \frac{\varepsilon}{2}$

$g(x) > q > g(x) - \frac{\varepsilon}{2}$

$x \in \{f > p\} \cap \{g > q\} \Rightarrow f(x) + g(x) > p + q > \underbrace{f(x)+g(x)}_{\gamma} - \varepsilon = c$

fg: trik $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$, vím $f \pm g$ měřitelné,

$(f+g)^2 = \varphi \circ (f+g)$, $\varphi(y) = y^2$ spojité

$\longrightarrow$ L 18.2. $\Rightarrow$ $\underline{\perp}$

f/g : stačí $\frac{1}{g}$ je měřitelná v $\tilde{M} := \{g \neq 0\} =$
$= \{g > 0\} \cup \{g < 0\}$
a tedy je měřitelná

$$\left\{\frac{1}{g} > c\right\} = \underbrace{\{g > 0\}}_{\in m} \cap \{1 > cg\} \cup \underbrace{\{g < 0\}}_{\in m} \cap \{1 < c \cdot g\}$$

2. $\max\{f, g\}$ měř. : $\{\max\{f,g\} > c\} = \{f > c\} \cup \{g > c\}$
min - - - - - - - - - $\cap$ - - - -

$f^+ = \max\{f, 0\}$; $f^- = \max\{-f, 0\}$
$|f| = f^+ + f^-$

3. $\sup_j f_j$ $(\sup_j f_j)(x) := \sup\{f_j(x) ; j \in N\}$
$\{\sup_j f_j > c\} = \bigcup_j \{f_j > c\}$

$\inf_j f_j = -(\sup_j(-f_j))$

tvrdím : $\lim_{j \to \infty} f_j(X) = \sup_{n \in N}\left(\inf_{j \geq n} f_j(x)\right)$
↳ ⏚ (sup, inf zachovávají měřitelnost)

postup : $PS > c \overset{\Leftarrow}{\cancel{\Rightarrow}} LS > c$
$PS < c \overset{\Leftarrow}{\cancel{\Rightarrow}} LS < c$ $\Big\}$ $\forall c \in R$ → $PS = LS$, jinak volme c ostře mezi → spor

~~$PS > c$~~ :

$LS > c$: vol $\varepsilon > 0$; $PS > c + \varepsilon$
$\exists n \ldots \; \forall_j \geq n : f_j(x) > c + \varepsilon$
$\inf_{j \geq n} f_j(x) \geq c + \varepsilon$ $/ \sup_n$
$PS \geq c + \varepsilon < c$

$LS < c$: vol $\varepsilon > 0$ $LS < c - \varepsilon$
$\exists n \ldots \; \forall_j \geq n : f_j(x) < c - \varepsilon$
$\inf_{j \geq n} f_j(x) \leq c - \varepsilon$ $/ \sup_n$
$PS \leq c - \varepsilon < c$

Def. charakteristická funkce množiny A :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in A \\ 0 ; & \text{jinde} \end{cases}$$

funkce $f : M \to R$ se nazve jednoduchá, jestliže
$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x)$; kde $c_j \in R$; $A_j \subset M$ jsou měřitelné množiny

Poznámka: je ekvivalentní

1. f je jednoduchá

$\Updownarrow$

2. f je měřitelná a $f(M)$ je konečná množina

dk. $1 \Rightarrow 2$: BÚNO: A_j … disjunktní

$$\{f > c\} = \bigcup_{j;\, c_j > c} A_j \; ; \; f(M) = \{c_1, \dots, c_n\}$$

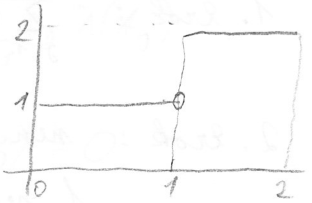
$2 \Rightarrow 1$: nechť $f(M) = \{d_1, \dots, d_m\}$

$$\Rightarrow f = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j} \; ; \; B_j = \{x \in M,\ f(x) = d_j\}$$

$\hookrightarrow$ měřitelná dle L. 18.1.

Poznámka: jednoduchou fci lze zapsat více způsoby

$$1 \cdot \chi_{[0,1)} + 2\chi_{[1,2]} = \chi_{[0,2]} + \chi_{(1,2]}$$



Věta 18.2. Nechť f je nezáporná, měřitelná v M

Pak existují jednoduché, nezáporné funkce f_k v M takové, že $f_k(x) \to f(x)$ pro $\forall x \in M$ a navíc $\{f_k(x)\}_k$ je neklesající a $f_k(x) \leq f(x)$ pro $\forall x \in M$

stručně: $0 \leq f_k(x) \nearrow f(x)$; $\forall x \in M$

idea: binární rozvoj: $a \geq 0$

$$[a]_2 = 1011.100110100100$$

tvrdíme: $f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} \underbrace{\left(\sum_{j=-k}^{k} 2^j \chi_{A_j}(x) \right)}_{f_k}$ // tj. idea

$$A_j = \{x \in M ; [f(x)]_2 \text{ má 1 na } j\text{-té pozici}\}$$

zjevně: $0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x)$

f_k nabývají konečně hodnot

? měřitelnost A_j: $A_j = \{f \in [1,2)\} \cup \{f \in [3,4)\} \cup \dots =$

$$= \bigcup_{i \text{ liché}} \{f \in [i, i+1)\}$$

obecně:

$$A_j = \bigcup_{i \text{ liché}} \{2^{-j} f \in [i, i+1)\}$$

Def.: [Abstraktní Lebesgueův integrál]

$f(x): M \to \mathbb{R}$ <u>měřitelná</u>

1. krok f jednoduchá: $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \chi_{A_j}$ … $\int_M f\,d\lambda := \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \lambda(A_j)$

2. krok f nezáporná, měřitelná

$$\int_M f\,d\lambda := \sup\left\{ \int_M s\,d\lambda ;\ s \text{ jednoduchá};\ 0 \le s(x) \le f(x)\ \forall x \in M \right\}$$

3. krok f obecná: $\int_M f\,d\lambda := \int_M f^{+}\,d\lambda - \int_M f^{-}\,d\lambda$, má-li pravá strana smysl (není $\infty - \infty$)

ověření korektnosti definice:

1. krok: $\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_j \chi_{\tilde{A}_j}(x) \overset{?}{\Rightarrow} \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda(A_j) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_j \lambda(\tilde{A}_j)$

↳ nebudeme dokazovat

2. krok: není ve sporu s 1. krokem:

f jednoduchá: $\int_M f\,d\lambda = \sup\left\{ \int s\,d\lambda ;\ 0 \le s \le \cancel{f}, \to f\ \ s \text{ jednoduchá} \right\}$

dle def. v kroku 1

„$\le$" jasné: volme $s = f$

„$\ge$" f, g jednoduché, $f \le g \Rightarrow \int_M f\,d\lambda \le \int_M g\,d\lambda$

Značení: $\int_M f\,d\lambda$; $\int_M f(x)\,d\lambda(x)$; je-li $M \subset \mathbb{R}^n$; λ - Leb. míra $\int_M f(x)\,dx$

$f \in \mathcal{L}^*(M)$ … integrál existuje, fce má integrál $\in \mathbb{R}^*$

$f \in \mathcal{L}(M) = \{ f \in \mathcal{L}^*(M);\ \int_M f\,d\lambda \in \mathbb{R} \}$ … integrál konverguje … fce je integrovatelná

Věta 18.3. M… měřitelná; $f, g: M \to \mathbb{R}$

Nechť $f = g$ skoro všude v M

Potom 1. f je měřitelná $\Leftrightarrow$ g je měřitelná

2. $\int_M f\,d\lambda = \int_M g\,d\lambda$ (má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se)

dk. $f = g$ s.v. v M … $M = \tilde{M} \cup N$; $f(x) = g(x)\ \forall x \in \tilde{M} \in \mathfrak{M}$

$\lambda(N) = 0$

ad 1.: f měř. $\Rightarrow$ g měř.

$$\{x \in M, g(x) > c\} = \underbrace{\{x \in M ; f(x) > c\}}_{\text{měřitelná}} \cup \{x \in N ; g(x) > c\} \setminus \{x \in N ; g(x) \leq c\}$$

nulové a tedy měřitelné

2. (1. krok) f, g … jednoduché

$$f := \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \chi_{A_j} \ ; \quad g := \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \cancel{\chi}_{A_j} \parallel \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \tilde{c}_j \cdot \chi_{A_j}$$

BÚNO (společné zjemnění): $n = \tilde{n}$; $A_j = \tilde{A}_j \ \forall j$

↳ disjunktní

$f = g$ sv. $\Rightarrow$ $c_j = \tilde{c}_j$ vyjma případu, kdy $\lambda(A_j) = 0$

$$\int_M f \, d\lambda - \int_M g \, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda(A_j) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \lambda(A_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (c_j - \tilde{c}_j) \lambda(A_j) = 0$$

(2. krok): $f, g \geq 0$ měřitelné

$$\int_M f \, d\lambda = \sup \left\{ \int_M s \, d\lambda \ ; \ 0 \leq s \leq f \ ; \ s \text{ jednoduchá} \right\}$$

polož $\tilde{s}(x) = \begin{cases} s(x) & ; f(x) = g(x) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{s} \text{ jednoduchá} \ ; \ 0 \leq \tilde{s} \leq g \\ \text{dle 1. kroku} \ \int_M \tilde{s} \, d\lambda = \int_M s \, d\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \int_M g \, d\lambda \geq \int_M f \, d\lambda$$

„$\leq$" symetricky

(3. krok) f, g obecné, měřitelné

$$\int_M f \, d\lambda := \int_M f^+ d\lambda - \int_M f^- d\lambda$$

$$\int_M g \, d\lambda := \int_M g^+ d\lambda - \int_M g^- d\lambda$$

$f = g$ s.v. $\Rightarrow$ $f^+ = g^+$; $f^- = g^-$ s.v.

dle 2. kroku: pravé strany se rovnají

Rozšířená definice : $M \ldots$ měřitelná

$f(x)$ definována skoro všude v M

tj. $f(x) : \tilde{M} \to \mathbb{R}$; $\lambda(M \setminus \tilde{M}) = 0$

Definuji $$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & ; x \in \tilde{M} \\ \text{libovolně} & ; x \in M \setminus \tilde{M} \\ (\text{např. } 0) & \end{cases}$$ // toto neovlivní výsledek // díky V 18.3.

Řekneme, že $f(x)$ je měřitelná v M, je-li $\tilde{f}$ měřitelná a definujeme

$$\int_M f \, d\lambda := \int_M \tilde{f} \, d\lambda \text{ ; má-li PS smysl}$$

Příklad : $\frac{1}{x}$ je měřitelná v $\mathbb{R}$; $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{M} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$N = \{0\}$

↳ měřitelná díky L. 18.2.

Rozšířená definice č. 2. U měřitelných (a jednoduchých) funkcí dovolíme funkční hodnoty $\pm\infty$

pozn. platí úmluva : $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ (při výpočtu míry a integrálu)

Příklad ① $$\int_{\mathbb{R}} 0 \, d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}} \, d\lambda_1 = 0 \cdot \lambda(\mathbb{R}) = 0 \cdot (+\infty) = 0$$

② $$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda_1 =$$

$$g(x) = \begin{cases} \infty & ; x \in \mathbb{Q} \\ -\infty & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$g^+ = \infty \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$; $g^- = +\infty \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$

$$\int_{\mathbb{R}} g^+ \, d\lambda_1 = \infty \cdot \lambda_1(\mathbb{Q}) = \infty \cdot 0 = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} g^- \, d\lambda_1 = +\infty \cdot \lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \infty$$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \ldots$ disj.

$$\underset{+\infty}{\lambda_1(\mathbb{R})} = \underset{0}{\lambda_1(\mathbb{Q})} + \underset{\infty}{\lambda_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$$

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI INTEGRÁLU:

Věta 18.4. [Leviho věta] Nechť f_k, f jsou nezáporné, měřitelné v M. Nechť $0 \le f_k(x) \nearrow f(x)$ pro s. v. $x \in M$.

Potom $\int_M f_k \, d\lambda \longrightarrow \int_M f \, d\lambda$

dk. $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$; $\{f_k(x)\}_k$ neklesající BÚNO pro $\forall x \in M$
↳ v. 18.3.

máme $f_k \le f_{k+1} \le f$ // $\int$

$$\int_M f_k \, d\lambda \le \int_M f_{k+1} \, d\lambda \le \int_M f \, d\lambda$$ // monotonie $\int$, důkaz // později

$\Rightarrow \exists \lim_{k \to \infty} \int_M f_k \, d\lambda \le \int_M f \, d\lambda$ jasné

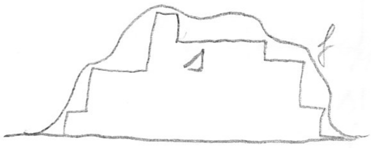
„$\ge$“:

1. případ: $\int_M f \, d\lambda < \infty$

$\varepsilon > 0$ libovolné: $\exists$ jednoduchá $s(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot \chi_{A_j}(x)$, že

$0 \le s(x) \le f(x) \quad \forall x \in M$

$A_j \subset M$ měřitelné, BÚNO disjunktní



$$\int_M s \, d\lambda = \sum_{j=1}^{N} c_j \lambda(A_j) > \int_M f \, d\lambda - \varepsilon$$

navíc: BÚNO $s(x) < f(x)$ na $\bigcup_j A_j$, $c_j > 0$

$A_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{j,k}$; $\underset{\downarrow}{A_{j,k}} := \{x \in A_j, f_k(x) > c_j\}$

měřitelné $= A_j \cap \{f_k > c_j\}$

„$\supseteq$“ jasné $A_{j,k} \subset A_j$

„$\subseteq$“ $x \in A_j$: $f_k(x) \to f(x) > c_j \ldots f_k(x) > c_j$ pro k velké

$\Rightarrow x \in A_{j,k}$

pozorování: $\{f_k(x)\}_k$ neklesající $\Rightarrow A_{j,k} \subset A_{j,k+1}$

Věta 17.1. $\lambda(A_j) = \lim_{k \to \infty} \lambda(A_{j,k})$; $\forall j = 1, \ldots, N$ pevné

nyní: $\int_M f \, d\lambda - \varepsilon < \int_M s \, d\lambda = \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot \lambda(A_j) = \sum_{j=1}^{N} c_j \lim_{k \to \infty} \lambda(A_{j,k})$

aritmetika limit: $= \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{N} c_j \cdot \lambda(A_{j,k}) \right) = \lim_{k \to \infty} \int_M t_k \, d\lambda$; $t_k = \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot \underset{\downarrow}{\chi_{A_{j,k}}}$

jednoduché funkce

pozorování: $0 \le t_k \le f_k$

$$t_k(x) = \begin{cases} c_j \ ; \ x \in A_{j,k} \dots f(x) > c_j \\ 0 \ \text{jinde} : \ f(x) \ge 0 \ \text{vždy} \end{cases}$$

z definice vyplývá

$$\int_M f_k \, d\lambda \ge \int_M t_k \, d\lambda$$

tj.: $$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{N} c_j \cdot \lambda(A_{j,k})\right) = \lim_{k\to\infty}\int_M t_k \, d\lambda \le \lim_{k\to\infty}\int_M f_k \, d\lambda$$

$\varepsilon > 0$ libovolné … „$\le$"; $\underline{\underline{\perp}}$

2. případ: $\int_M f \, d\lambda = \infty$

cíl: $\lim_{k\to\infty}\int_M f_k \, d\lambda = \infty$

$\forall K > 0 \ \exists n_0, \ k \ge n_0 \Rightarrow \int_M f_k \, d\lambda > K$

$K > 0$ dáno: $\exists$ jednoduchá $s(x)$; $0 \le s \le f$

$$K < \int_M s \, d\lambda < \infty$$

definuji pomocné funkce $\tilde{f}_k :=$ ~~max~~

$:= \min\{f_k, s\}$

zjevně: $0 \le \tilde{f}_k \nearrow s$; $x \in M$

dle 1. případu: $\int_M \tilde{f}_k \, d\lambda \to \int_M s \, d\lambda > K$

$\exists n_0 \dots \int_M \tilde{f}_k \, d\lambda > K \ \forall k \ge n_0$; leč

$$\int_M f_k \, d\lambda \ge \int_M \tilde{f}_k \, d\lambda$$

Důsledek: [(PA)] f nezáporná, měřitelná v M

$\Rightarrow \exists$ jednoduché nezáporné f_k v M tak, že

$0 \le f_k \nearrow f$ s.v. v M a $\begin{pmatrix} \text{V.18.2.} \\ + \\ \text{V.18.4.} \end{pmatrix}$

$\int_M f_k \, d\lambda \to \int_M f \, d\lambda$ PRINCIP APROXIMACE

(je to rovněž ekvivalentní definice lebesgueova integrálu)

Značení: viz str. 49

Věta 18.5. [Vlastnosti $\mathcal{L}^*(M)$]

Nechť $f, g \in \mathcal{L}^*(M)$

Potom:

1\. (i) $\int_M \alpha f \, d\lambda = \alpha \int_M f \, d\lambda$

(ii) $\int_M (f+g) \, d\lambda = \int_M f \, d\lambda + \int_M g \, d\lambda$, má-li PS smysl

2\. (i) $\underbrace{f \le g \text{ s.v. v } M}_{} \Rightarrow \int_M f \, d\lambda \le \int_M g \, d\lambda$

~~(ii)~~

(ii) $\left| \int_M f \, d\lambda \right| \le \int_M |f| \, d\lambda$

3\. nechť $f \ge 0$, pak

(i) $\int_M f \, d\lambda < \infty \Rightarrow f < \infty$ s.v.

(ii) $\int_M f \, d\lambda = 0 \Leftrightarrow f = 0$ s.v.

dk. (2i): nechť $0 \le f \le g$

$\int_M f \, d\lambda := \sup \left\{ \int_M s \, d\lambda ;\ 0 \le s \le f ;\ s \text{ jednoduchá} \right\}$

$\rotatebox{-90}{$\le$}$ // využito v dk. Léviho věty

$\int_M g \, d\lambda := \sup \left\{ \int_M s \, d\lambda ;\ 0 \le s \le g ,\ s \text{ jednoduchá} \right\}$

↑ větší množina

f, g obecné: $f \le g \Rightarrow f^+ \le g^+$

$f^- \ge g^-$

$g(x) > 0 :\ g^-(x) = 0$

$f^-(x) \ge 0$

$g(x) \le 0 \Rightarrow f(x) \le 0$

$\Rightarrow g^-(x) = -g(x)$

$f^-(x) = -f(x)$

$$\underbrace{\int_M f \, d\lambda}_{} = \int_M f^+ d\lambda - \int_M f^- d\lambda \le \int_M g^+ d\lambda - \int_M g^- d\lambda = \underbrace{\int_M g \, d\lambda}_{} \ ; ⏚$$

dk. V.18.5. (1 ii) $\int\limits_M f+g = \int\limits_M f + \int\limits_M g$

1. krok : f, g jednoduché $\Rightarrow$ $f+g$ jednoduchá, zjevné

2. krok : f, g nezáporné . . . použijeme princip aproximace (viz. str. 53)

(PA) : $\exists\, t_\varepsilon, s_\varepsilon$ jednoduché : $0 \le t_\varepsilon \nearrow f$

$0 \le s_\varepsilon \nearrow g$ s.v. v M

$0 \le t_\varepsilon + s_\varepsilon \nearrow f+g$

$$\begin{tikzcd}
\int (t_\varepsilon + s_\varepsilon) \arrow[d] & = & \int\limits_M t_\varepsilon \arrow[d] & + & \int\limits_M s_\varepsilon \arrow[d, "\text{Levi}"] & \forall \varepsilon \\
\int (f+g) & & \int f & & \int g &
\end{tikzcd}$$

goto (2 ii);
goto (3 i);
goto (3 ii); } // po přehlednost jsou příslušné důkazy na str. 56 // důsledků (2 ii), (3 i), (3 ii) se ve zbytku důkazu využívá

3. krok : f, g obecné : $h := f+g$

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

linearita pro nezáporné fce

$$\begin{tikzcd}
\int\limits_M h^+ \arrow[drr] & + & \int\limits_M f^- \arrow[drrrr] & + & \int\limits_M g^- \arrow[drrrrrr] & = & \int\limits_M h^- \arrow[dllll] & + & \int\limits_M f^+ \arrow[dll] & + & \int\limits_M g^+ \arrow[d] \\
& & \int\limits_M h & & = & & \int\limits_M f & & + & & \int\limits_M g
\end{tikzcd}$$

má smysl? :

a) $h(x) := f(x) + g(x)$ má smysl s.v. v M

?? $\exists\, N \subset M ;\ \lambda(N) > 0$ $\left.\begin{matrix} f = \infty \\ g = -\infty \end{matrix}\right\}$ v N

$\Rightarrow$ tak by $f+g$ nebyl definován

$\Rightarrow$ $f^+ = +\infty$ v N $\Rightarrow$ $\int\limits_M f^+ = \infty$ $\Rightarrow$ $\int\limits_M f = \infty$

podobně $\int\limits_M g = -\infty$

$\Rightarrow$ potom by ale PS neměla smysl; spor

b) ?? $\int_M h^+ = \int_M h^- = \infty$

$h^+ = (f+g)^+ \le f^+ + g^+$

$\int_M h^+ = \infty \Rightarrow$ např. $\int_M f^+ = \infty \Rightarrow \int_M f = \infty$ a $\int f^- < \infty$

$\cancel{\int_M} h^- \le f^- + g^- \Rightarrow \int_M g^- = \infty = \int_M g = -\infty$

} PS nemá smysl, spor

(2 ii) $-|f| \le f \le |f|$

$$-\int_M |f| \overset{(1ii)}{=} \int_M -|f| \le \int_M f \le \int_M |f|$$

$$\left| \int_M f \right| \le \int_M |f|$$

(3 i) $f \ge 0$ měřitelná : $\int_M f < \infty \Rightarrow f < \infty$ s.v. v M

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^*(M)$

$A = \{ x \in M ; f(x) = \infty \} \Rightarrow \lambda(A) = 0$

definuji $s := n \chi_A$ ... $0 \le 1 \le f \ \forall n \in \mathbb{N}$

jednoduchá

$\mathbb{R} \ni c = \int_M f \ge \int_M s = n \cdot \lambda(A)$

$\lambda(A) \le \frac{c}{n}$; $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda(A) = 0$

(3 ii) $f \ge 0$ měřitelná : $\int_M f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ s.v.

„$\Leftarrow$" jasné : $\int_M f = \int_M 0 = 0$ (V.18.3.)

„$\Rightarrow$" $A = \{ x \in M ; f(x) > 0 \}$: cíl $\lambda(A) = 0$

trik : $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$; $A_j = \{ x \in M ; f(x) > \frac{1}{j} \}$

$A_j \subset A$ jasné ; $x \in A : f(x) > 0$ ... vol $j \in \mathbb{N}$;

$f(x) > \frac{1}{j} > 0$ ... $x \in A_j$

zjevně $A_j \subset A_{j+1} \Rightarrow \lambda(A) = \lim_{j \to \infty} \lambda(A_j)$

stačí dokázat : $\lambda(A_j) = 0 \ \forall j$

$0 \le \frac{1}{j} \chi_{A_j} \le f$ s.v. v M $\Big/ \int_M$

$0 \le \frac{1}{j} \lambda(A_j) \le \int_M f = 0$

$\hookrightarrow > 0 \Rightarrow \lambda(A_j) = 0$

Poznámka [Vlastnosti $\mathcal{L}(M)$]

$\mathcal{L}(M) = \{ f : M \to \mathbb{R}^*$ měřitelná; $\int_M f \, d\lambda \in \mathbb{R} \}$ f integrovatelná (integrabilní) (integrál konv.)

① $f, g \in \mathcal{L}(M) \Rightarrow f + g, \alpha f \in \mathcal{L}(M)$ (vektorový prostor)

② $f \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow f$ je měřitelná a $\int_M |f| \, d\lambda < \infty$ (*)

důsledek: f měřitelná; $|f| \leq g$; $g \in \mathcal{L}(M) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(M)$

③ $f \in \mathcal{L}(M) \Rightarrow |f| < \infty$ s. v. (V.18.5.; 3i)

(*) $|f| = f^+ + f^-$; V.18.5.: $\int_M |f| \, d\lambda = \int_M f^+ d\lambda + \int_M f^- d\lambda$

Poznámka: „záměna limity a integrálu":

obecně NEPLATÍ $\lim_{n \to \infty} \int_M f_n \, d\lambda \overset{(*)}{=} \int_M \left(\lim_{n \to \infty} f_n \right) d\lambda$

Př. $f_n = n \chi_{(0, \frac{1}{n})} \longrightarrow 0$ ale $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda_1 = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \not\longrightarrow 0$

(*) platí, pokud navíc:

- $f_n \rightrightarrows f$; $\lambda(M) < \infty$ (V.15.2.) // příliš silné předpoklady
- $0 \leq f_n \nearrow f$ (Levi)
- následující Lebesgueova věta

Věta 18.6. [Lebesgueova]

Nechť f_n jsou měřitelné v M; $f_n(x) \to f(x)$ s. v. v M

Nechť $\exists \, g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že $|f_n| \leq g$ s. v. v M pro $\forall n \in \mathbb{N}$

Potom $\int_M f_n \, d\lambda \to \int_M f \, d\lambda$ ↳ „integrabilní majoranta"

dk.

tvrdím: $f, f_n \in \mathcal{L}(M)$: f_n měřitelné

$f_n \to f \Rightarrow f$ měřitelná (V.18.1.)

$|f_n|, |f| \leq g$ s. v. $\Rightarrow \int |f_n|, \int |f| < \infty$

pomocné funkce:

$$h_n(x) := 2 g(x) - \sup_{j \geq n} |f_j(x) - f(x)|$$

(měřitelné V.18.1.)

$$\left.\begin{array}{l} |f_j - f| \leq |f_j| + |f| \leq 2g \implies h_n \geq 0 \\ \sup\limits_{j \geq n} (\dots) \geq \sup\limits_{j \geq n+1} (\dots) \implies h_n \leq h_{n+1} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{j \geq n} | f_j(x) - f(x) | \right) = 0 \text{ neboť } |f_j(x) - f(x)| \to 0 \end{array}\right\} \text{s. v. v } M$$

viz V. 18. 1. část 3

$$h_n \nearrow 2g$$

Levi (V. 18. 4) : $\int\limits_M h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{\int\limits_M 2g}$ → odečtu (konečné číslo !)

$$\int\limits_M 2g - \int\limits_M \sup_{j\geq n} |f_j - f|$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \int \sup_{j \geq n} |f_j - f| \, d\lambda = 0$$

závěr : $0 \leq \underbrace{\left| \int\limits_M f_n - \int\limits_M f \right|}_{\to 0 \text{ (věta o 2 policajtech)}} = \left| \int (f_n - f) \right| \leq \int\limits_M |f_n - f| \leq \int\limits_M \sup_{j\geq n} |f_j - f| \to 0$

Věta 18.7. [Leviho věta pro řady]

Nechť $f_k \geq 0$ s. v., měřitelné v M

Potom $\int\limits_M \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\lambda = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_M f_k \, d\lambda$

dk. označme $h_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ (≥ 0 s. v. ; měřitelné V. 18. 1.)

$\{h_n(x)\}_n$ ... neklesající pro s. v. $x \in M$ pevná

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) =: h(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ → definice Σ

Levi (V.18.4.) : $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_M h_n = \int\limits_M h$

(LS) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_M \sum\limits_{k=1}^{n} f_k = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_M f_k \right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_M f_k$

(PS) $\int\limits_M h = \int\limits_M \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \right)$ ⏚

Příklad : $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x} = \int\limits_0^1 \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k \right) dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^1 x^k dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$

$f_k(x) = x^k \geq 0$ v $(0,1)$

měřitelné (spojité)

$$\int\limits_{(a,b)} f \, d\lambda_1 \overset{??}{=} [F(x)]_a^b$$

→ prim. fce

→ ještě nevím, později

Věta 18.8. [Lebesgueova věta pro řady]

Nechť f_k jsou měřitelné v M

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = h(x)$ s.v. v M

Nechť $\exists g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že $\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \le g(x)$ s.v. v M, pro $\forall n \in N$

Potom $$\int_M h\,d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k\,d\lambda$$

dk. označme $h_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

pozoruji $h_n, f_k, h \in \mathcal{L}(M)$

měřitelnost: f_k víme; $h_n = f_1 + \dots + f_n$ V.18.1.

$|h_n| \le g \Rightarrow h_n \in \mathcal{L}(M)$

$f_1 = h_1$; $f_{n+1} = h_{n+1} - h_n \Rightarrow f_k \in \mathcal{L}(M)$

dále: $h_n(x) \to h(x)$ s.v. v M ... (V.18.6.) $\Rightarrow \int_M h_n \to \int_M h$

$\int_M h = \int_M \sum_{k=1}^{\infty} f_k$

$\int_M h_n = \int_M \sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} \int_M f_k \to \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k$ ⏚

Příklad $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{dx}{1-(-x)} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k\,dx \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\int_0^1 (-1)^k x^k\,dx}_{f_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right| \le |(-1)^0 x^0| = \underset{g(x)}{\underset{\parallel}{1}} \in \mathcal{L}(0,1)$$

$x^k \to 0$; $k \to \infty$

Věta 18.9. [Závislost $\int$ na oblasti integrace]

① Nechť f je měřitelná v $M := M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$ (konečné disjunktní)

Potom $\int_M f\,d\lambda = \int_{M_1} f\,d\lambda + \dots + \int_{M_n} f\,d\lambda$; má-li PS smysl

② Nechť buď (i) $f \ge 0$ měřitelná

nebo (ii) $f \in \mathcal{L}(M)$

Nechť $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$; M_j disjunktní, měřitelné

Potom $\int_M f\,d\lambda = \sum_j \int_{M_j} f\,d\lambda$

③ Nechť buď (i) $f \ge 0$ měřitelná, nebo (ii) $f \in \mathcal{L}(M)$ //jako v ②

Nechť $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ kde $M_j \subset M_{j+1}$

Potom $\int_M f\,d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int_{M_j} f\,d\lambda$

dk. Klíčové pozorování : $f \in \mathcal{L}^*(M)$; $N \subset M$ měřitelná
(K.P.) $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^*(N)$ a platí $\int_N f\,d\lambda = \int_M f\chi_N\,d\lambda$

1. krok f jednoduchá : zjevné

2. krok $f \geq 0$; měřitelná : $\int_N f\,d\lambda = \sup\{\int s ; 0 \leq s \leq f$ v N ; s jednoduchá$\}$

$\int_M f\chi_N\,d\lambda = \sup\{\int_M s ; 0 \leq s \leq f\chi_N$ v M, s jednoduchá$\}$

$0 \leq s \leq f\chi_N \iff s = 0$ mimo N
$0 \leq s \leq f$ v N

pak $\int_N f\,d\lambda = \int_M f\chi_N\,d\lambda$

3. krok f obecná : $\int_N f\,d\lambda = \int_N f^+ - \int_N f^- = \int_M f^+\chi_N - \int_M f^-\chi_N =$
$= \int_M (f\chi_N)^+ - \int_M (f\chi_N)^-$
$= \int_M f\chi_N$

① $f = f\chi_{M_1} + f\chi_{M_2} + \cdots + f\chi_{M_n}$ platí v M
(V.18.4.) $\int_M f = \int_M f\chi_{M_1} + \int_M f\chi_{M_2} + \cdots + \int_M f\chi_{M_n}$; má-li PS smysl
díky (K.P.) $= \int_{M_1} f + \cdots + \int_{M_n} f$

② $f = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{(f\chi_{M_j})}_{f_j}$; $\int_M f = \int_M \sum f_j \overset{(*)}{=} \sum_j \int_M f_j \overset{(K.P.)}{=} \sum_j \int_{M_j} f$
ověření (*) : (i) $f \geq 0 \Rightarrow f_j \geq 0$; (V.18.7.)
(ii) $|\sum_{j=1}^{n} f_j| = |f\chi_{\cup_{j\leq n} M_j}| \leq |f| \in \mathcal{L}(M)$;
(V.18.8)

③ $f_j := f\chi_{M_j} \longrightarrow f$; $j \to \infty$, $x \in M$ pevné
$\int_M f_j \overset{K.P.}{=} \int_{M_j} f \xrightarrow{(*)} \int_M f$
ověření (*) (i) $f \geq 0$: $0 \leq f_j \nearrow f$: Leviho v.
(ii) $f \in \mathcal{L}(M)$: $|f_j| \leq |f| \in \mathcal{L}(M)$ Lebesgueova v.

Poznámka :

① $\left.\begin{array}{l} f \text{ měř. v } M ; N \subset M \text{ měř.} \\ \lambda(M \setminus N) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_M f\,d\lambda = \int_N f\,d\lambda = \int_M f\chi_N\,d\lambda = f$ s.v. v M

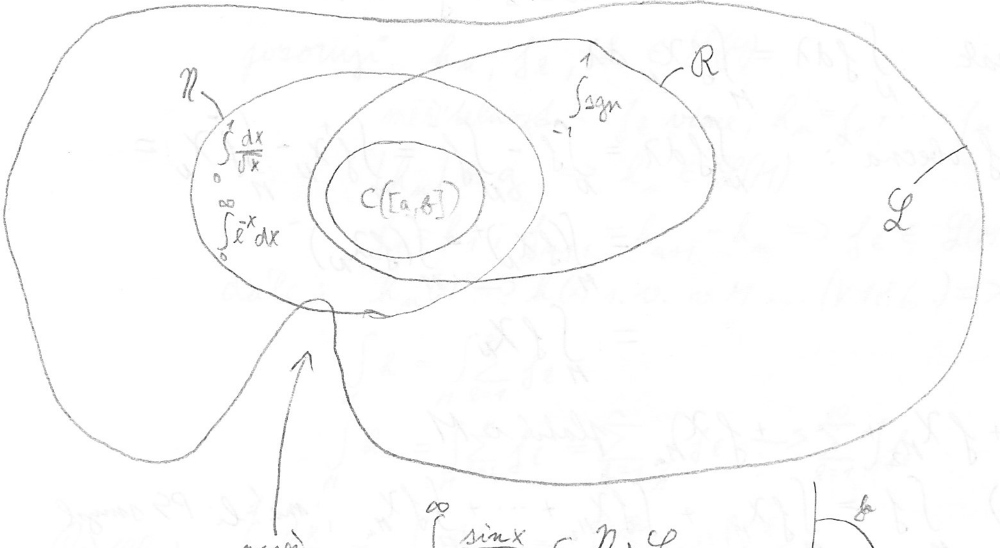
např. $\int_{(a,b)} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx$

Poznámka ② $\int_a^b f(x)\,dx \dots (R)\int_a^b f(x)dx$

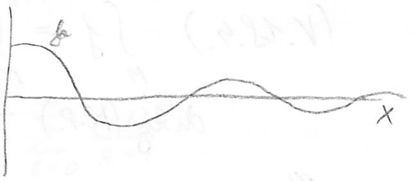
Věta: $f \in R(a,b) \Leftrightarrow f$ je omezená a f je spojitá s. v. (ve smyslu λ_1)

$(N)\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$ kde F je p. f. k $f(x)$

$(\mathcal{L})\int_a^b f(x)\,dx = \int_{(a,b)} f\,d\lambda_1$ a budiž od nyní chápán jako defaultní



např. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{L}$



Věta 18.10. [Rovnost $\mathcal{L}$.i. a $\mathcal{N}$.i]

Nechť $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá

Nechť navíc buď (i) $f \geq 0$

nebo (ii) $\int_a^b |f| < \infty$

Potom $\int_a^b f(x) = \left[F(x)\right]_a^b$; kde $F(x)$ je libovolná p. f. k $f(x)$ v (a,b)

Jinými slovy: $(\mathcal{L})\int_a^b f = (\mathcal{N})\int_a^b f$

dk. definujme $F(x) := \begin{cases} (\mathcal{L})\int_{x_0}^x f & ; \; x \geq x_0 \\ -(\mathcal{L})\int_x^{x_0} & ; \; x < x_0 \end{cases}$; $x \in (a,b)$

? korektní def?:

$\left.\begin{matrix} - f \text{ měřitelná (spojitá) v } [x_0, x] \\ \text{omezená} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \in \mathcal{L}([x_0,x])$

tvrdíme: $F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in (a,b)$ $\boxed{\text{spojitost } f}$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \underset{\pm f}{=} f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \underbrace{\left[f(t)-f(x)\right]}_{<\varepsilon \;\Leftarrow\; |h|<\delta} dt = f(x) + r(h)$$

$|r(h)| \leq \varepsilon$

$(\mathcal{L}) \int_{x_0}^{x} f = F(x) = [F(\cdot)]_{x_0}^{x}$; $x \to b-$

(PS) $F(x) - F(x_0) \to F(b-) - F(x_0) = [F(\cdot)]_{x_0}^{b}$

(LS) $(\mathcal{L})\int_{x_0}^{x} f \to (\mathcal{L})\int_{x_0}^{b} f$; $x \to b-$

Heineho věta: $(\mathcal{L})\int_{x_0}^{x_n} f$; $\{x_n\}$ posl. $x_n \to b-$

BÚNO $\{x_n\}$ neklesající

$$(\mathcal{L})\int_{x_0}^{x_n} f = (\mathcal{L})\int_{(x_0,x_n)} f = (\mathcal{L})\int_{I_n} f \xrightarrow[V.18.9.]{} (\mathcal{L})\int_{x_0}^{b} f \; ; \; n \to \infty$$

($\exists \cdots$ $f \geq 0$ nebo $f \in \mathcal{L}(x_0, b)$)

$I_n \subset I_{n+1}$; $\bigcup_n I_n = (x_0, b)$

Tj.: $(\mathcal{L})\int_{x_0}^{b} f = (N)\int_{x_0}^{b} f$; analogicky: $(\mathcal{L})\int_{a}^{x_0} f = (N)\int_{a}^{x_0} f \to \underline{\underline{\perp}}$

nyní: $F(a) = \int_J f(a,x)\,dx$; „integrály závislé na parametru"

↳ parametr $\in I$

? spojitost, diferencovatelnost F ?

Příklad: $F(a) = \int_0^{\infty} e^{-|a|x} \sin(ax)\,dx$

pro $\alpha > 0$, $\beta \in R$: $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

$\vdots$

$\cos \beta x \cdots \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$

$$F(a) = \begin{cases} (a \neq 0): \frac{a}{|a|^2+a^2} = \frac{1}{2a} \\ (a = 0): 0 \end{cases}$$

e^{Ax} ; $A = \alpha + i\beta$

Pozoruji: $F(\cdot)$ nespojitá, ačkoliv f závisí na $\underline{a}$ spojitě.

Věta 18.11. [Spojitá závislost integrálu na parametru]

Nechť $I, J \in R$ jsou intervaly

Nechť $f(a,x): I \times J \to R$ splní

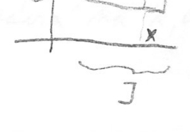
(i) pro $\forall a \in I$ pevné je $f(a,\cdot)$ měřitelná v J

(ii) pro s.v. $x \in J$ pevná je $f(\cdot, x)$ spojitá v I

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}(J)$ $\underline{\text{nezávislá}}$ na $\underline{a}$ tak, že

$|f(a,x)| \leq g(x)$ pro $\forall a \in I$, s.v. $x \in J$

Potom $F(a) = \int_J f(a,x)\,dx$ je spojitá v I



dk: $F(a)$ má smysl $\forall\, a \in I$ pevné

$\left.\begin{array}{l} f(a,\cdot) \dots \text{měřitelná} \\ |f(a,\cdot)| \leq g \in \mathcal{L}(J) \end{array}\right\} f(a,\cdot) \in \mathcal{L}(J)$

$\dots F(a) \in \mathbb{R}$

F spojitá v $J \overset{\text{Heine}}{\iff} \left.\begin{array}{l} a_n, a_0 \in J \text{ lib.} \\ a_n \to a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(a_n) \to F(a_0)$

$$\int_J \underbrace{f(a_n,x)}_{f_n(x)}\, dx \overset{?}{\longrightarrow} \int_J f(a_0,x)\, dx$$

$f_n(x) = f(a_n,x) \longrightarrow f(a_0,x)$ pro s.v. $x \in J$

((ii) & Heineho v.)

$\forall n: |f_n(x)| = |f(a_n,x)| \leq g(x)$ $\forall n$, s.v. $x \in J$

Lebesg. v. ... $\int_J f_n \longrightarrow \int_J f(a_0,x)\, dx$

Příkl.: ① $F(a) = \int_0^{100} \frac{a^2 x^2}{a^4+x^4}\, dx \quad a \in \mathbb{R}$

spojitost $F(a)$: V 18.11. $I = \mathbb{R}$; $J = (0,100)$

(i) $f(a,\cdot)$ měřitelná v $J \Leftarrow$ spojitá

(ii) $f(\cdot,x)$ spojitá v I : OK

$x \in (0,100)$ pevné

(iii) vzoreček $\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \leq \frac{1}{2} \quad \dots \alpha = a^2$, $\beta = x^2$

$(\alpha,\beta) \neq (0,0)$

$\Downarrow$

$|f(a,x)| \leq \frac{1}{2} =: g(x) \in \mathcal{L}(0,100)$

$\forall\, x, a$

$F(a)$ spojitá v $\mathbb{R}$

Příkl.: ② [Gamma funkce] $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx$

konvergence? $\int_0^\infty = \int_0^\delta + \int_\delta^1 + \int_1^\infty = I_1 + I_2 + I_3$

I_2 konv. (f spojitá $[\delta,1] \Rightarrow$ omezená)

$I_3 = \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x} \leq \int_1^\infty x^m e^{-x} = m! < \infty$

$m \in \mathbb{N}$; $m > s-1$ per-partes

I_1 $x^{s-1} e^{-x} \sim x^{s-1}$; $x \to 0+$: δ malé : I_1 konv $\iff s-1 > -1$

tj. $\boxed{s > 0}$

? $\Gamma(s)$ spojitá v $(0,\infty)$: V.18.11. (i) $f(s,\cdot)$ měř. $\Leftarrow$ spoj.

(ii) $f(\cdot,x)$ spoj : OK

(iii) majoranta (□)

(□) nejmenší majoranta $g(x) := \sup_{s>0} |f(s,x)| = \sup_{s>0} x^{s-1} e^{-x}$

$$g(x) = \begin{cases} (x<1) : & x^{-1} e^{-x} \\ (x=1) : & e^{-1} \\ (x>1) : & \infty \end{cases} \quad \notin \mathcal{L}(0,\infty)$$

/nutno užít trik

trik: zmenšení I: $\tilde{I} = (p,q)$; kde $0 < p < q < \infty$

? $\Gamma(s)$ spojitá v $\tilde{I}$: V 18.11.; (i), (ii) OK

majoranta: $g(x) := \sup_{s\in\tilde{I}=(p,q)} x^{s-1} e^{-x}$ $\begin{cases} x^{q-1}e^{-x} & ; x>1 \\ x^{p-1}e^{-x} & ; x\in(0,1) \end{cases}$

x pevné

$s \to x^{s-1} = \exp((s-1)\ln x)$ $\begin{cases} \text{roste} \Leftrightarrow x>1 \\ \text{klesá} \Leftrightarrow x\in(0,1) \end{cases}$

zjevně $g \in \mathcal{L}(0,\infty)$; neboť $\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ konverguje pro $a\in(0,\infty)$

$\Longrightarrow \Gamma(s)$ spojitá v (p,q)

$\Leftrightarrow \Gamma$ spojitá v každém bodě $x_0 \in (p,q)$

p,q libovolné $\in(0,\infty)$: interval se dá posunout

$\Rightarrow \Gamma$ je spojitá v každém $x_0\in(0,\infty)$

$\Leftrightarrow \Gamma$ je spojitá v $(0,\infty)$

nyní: derivace integrálu podle parametru: $\frac{d}{da}\int_J f(a,x)dx = \int_J \frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\,dx$

NEPLATÍ vždy

Věta 18.12. Nechť $f(a,x): I\times J \to \mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ otevřený interval

Nechť (i) pro $\forall a\in I$ je $f(a,\cdot)$ měřitelná v J

(ii) pro s.v. $x\in J$ je $f(\cdot,x)$ diferencovatelná$^{(*)}$ v I

(iii) $\exists g\in\mathcal{L}(J)$ tak, že $\left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| \le g(x)$ $\forall a\in I$, s.v. $x\in J$

(iv) $\exists a_0\in I$ tak, že $f(a_0,\cdot)\in\mathcal{L}(J)^{(**)}$

(*) $\exists \frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\in\mathbb{R}$ $\forall a\in I$

(**) $\int_J |f(a_0,x)dx| < \infty$

Potom $F(a) = \int_J f(a,x)dx$ konverguje pro $\forall a\in I$

a $F'(a) = \int_J \frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\,dx$

dk. 1. krok: konečnost $F(a)$: $f(a,x) = f(a_0,x) + \underbrace{f(a,x) - f(a_0,x)}_{V.O.S.H.}$

x pevné:

$|f(a,x)| \le \underset{\substack{\in\mathcal{L}(J) \\ \text{dle (iv)}}}{|f(a_0,x)|} + \underset{\substack{\in\mathcal{L}(J) \\ \text{dle (iii)}}}{|a-a_0|\cdot g(x)}$

$= (a-a_0)\frac{\partial f}{\partial a}(\alpha,x)$

$\alpha\in(a,a_0)\subset I$

↳ závisí na x,a,a_0

2. krok: $F'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(F(a+t) - F(a)\right)$; díky Heineho větě stačí počítat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\left(F(a+t_n) - F(a)\right)$$

kde $t_n \to 0$; $t_n \neq 0$ libovolná posloupnost

$$\frac{1}{t_n}\Big(F(\underbrace{a+t_n}_{\in I \text{ pro } n \text{ velké}}) - F(a)\Big) = \frac{1}{t_n}\left(\int_J f(a+t_n, x)\,dx - \int_J f(a,x)\,dx\right)$$

$$= \int_J \underbrace{\frac{1}{t_n}\Big(f(a+t_n,x) - f(a,x)\Big)}_{h_n(a,x)}\,dx$$

dle (ii): $h_n(a,x) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial a}(a,x)$; $n \to \infty$ s.v. $x \in J$

V.O.S.H.: $h_n(a,x) = \frac{\partial f}{\partial a}(\alpha, x)$; kde $\alpha \in (a, a+t_n) \subset I$

dle (iii) $|h_n(a,x)| \le g(x)$ $\forall n$ s.v. $x \in J$ → závisí na x, a, t_n

Lebesgue: $\int_J h_n(a,x)\,dx \to \int_J \frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\,dx$

Příklad $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\operatorname{arctg}(a \cdot \operatorname{tg} x)}_{f(a,x)}\,dx$; $a \in (0,\infty)$

V.18.12. (i) $f(a,\cdot)$ měřitelná (spojitá)

(ii) $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{1+(a\operatorname{tg}x)^2} \cdot \operatorname{tg} x \in R$ $\forall a > 0$; $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

(iii) majoranta: $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \underbrace{\left|\frac{a \cdot \operatorname{tg} x}{1+(a\cdot\operatorname{tg}x)^2}\right|}_{\le \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{a} \le \frac{1}{2a} \le \frac{1}{2\delta}$

$a \in \tilde{I} = (\delta, \infty)$

$\delta > 0$ pevné

$g(x) = \frac{1}{2\delta} \in \mathcal{L}(0, \frac{\pi}{2})$

$a \in \tilde{I}(\delta,\infty)$

(iv) $a_0 = 1$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)}_{x\ (x \in (0,\frac{\pi}{2})\,!!)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx < \infty$

V.18.12.: $\Rightarrow$ $F(a)$ konv. pro $\forall\, a \in (\delta, \infty)$

a navíc $F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+a^2\operatorname{tg}^2 x}\,dx$ $\Bigg|$ LZE SPOČÍTAT $t = \operatorname{tg} x$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ $\Bigg|$ =

$$= \int_0^{\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = (\dots) = \frac{\ln a}{a^2-1} = F'(a)$$

↳ pevné; tj. konstanta → $a \in (\delta, \infty)$, $\delta > 0$ libovolné $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \in (0, \infty)$

dále víme $F(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$

D. cv. dopočtěte $F(a)$:

Poznámka (značení) $\underset{\sim}{f}(x): M \to \mathbb{R}^*$; $M \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_M f(\underset{\sim}{x})\,dx = \int_M f\,d\lambda_n = \int_M f(\underset{\sim}{x})\,d\lambda_n(x) = \underbrace{\int \cdots \int}_{n\text{-krát}} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$$

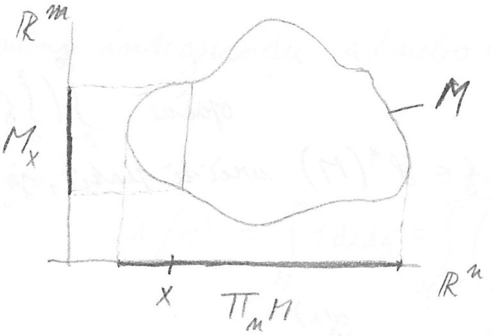
značení pro Fubiniho větu:

$M \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$\Pi_n M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \exists y \in \mathbb{R}^m \dots (x,y) \in M\}$ // projekce

a pro $x \in \Pi_n M$ pevné

$M_x = \{y \in \mathbb{R}^m;\ (x,y) \in M\}$ // řez



Věta 18.13. [Fubini]

Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelná; $f = f(\underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{x}}, \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{y}}) \in \mathcal{L}^*(M)$

Potom pro s. v. $x \in \Pi_n$ je $M_x \subset \mathbb{R}^m$ měřitelná a $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^*(M_x)$

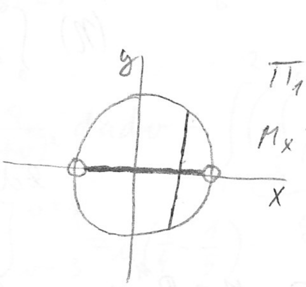
Označme-li $g(x) = \int_{M_x} f(x,\cdot)\,d\lambda_m$ je $g \in \mathcal{L}^*(\Pi_n)$ a platí

$$\int_M f\,d\lambda_{n+m} = \int_{\Pi_n} g\,d\lambda_n \text{ ; neboli } \int_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Pi_n}\left(\int_{M_x} f(x,y)\,dy\right)dx$$

dk. – bez důkazu

Příklad: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$

$f(x,y) = |x|$



$\Pi_1 M = (-1, 1)$

$M_x = (-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2})$

$\forall\ x \in \Pi_1 M$

$M \subset \mathbb{R}^2$ měřitelná (otevřená)

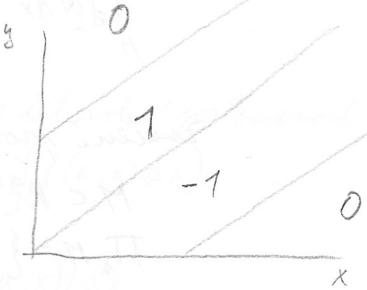
$|x| \in \mathcal{L}(M) \dots f = |x| \dots$ měřitelná (spojitá)

$$\text{Fubini: } \int_M |x|\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\Bigg(\underbrace{\overset{\cdots \geq 0}{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |x|}}_{g(x) = |x|\int_{-\sqrt{}}^{\sqrt{}} dy = 2|x|\sqrt{1-x^2}}\Bigg)dx = \int_{-1}^{1} 2|x|\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{\substack{\text{sudá fce}\\ \downarrow}}{=} 4\int_0^1 \underbrace{x\sqrt{1-x^2}}_{\text{spojitá, nezáporná}}\,dx \overset{\text{V.18.10.}}{=} 4\left[\frac{-(1-x)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Poznámka: $f \in \mathcal{L}^*(M)$ ... nelze vynechat; nestačí „má-li PS smysl"

k tomu příkl.:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \; ; & 0 < y < x+1 \\ -1 \; ; & y < x < y+1 \\ 0 & \text{jinde v } (0,\infty)^2 \end{cases}$$



$f \in \mathcal{L}(M)$ ... $\int_M f^+ = \int_M f^- = \infty$

mechanické užití Fub. v.: $\int_0^\infty \underbrace{\left(\int_0^\infty f(x,y)\,dy\right)}_{} dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}$

$$g(x) = \begin{cases} 1-x \; ; & x \in (0,1) \\ 0 \; ; & x > 1 \end{cases}$$

opačně $\int_0^\infty \left(\int_0^x f\right) dy = -1$

Poznámka: $f \in \mathcal{L}^*(M)$ určitě platí, je-li $\begin{cases} f \geq 0 \text{ měřitelná} \\ f \text{ měřitelná}; \boxed{\int |f| < \infty} \end{cases}$

tj. $f \in \mathcal{L}(M)$ lze ověřit pomocí Fub. v.

Příklad: $\int_0^1 \overbrace{\frac{x^b - x^a}{\ln x}}^{g(x)} dx$

$0 < a < b$

$$g(x) = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}(\;\;)\,dy = \int_a^b x^y\,dy$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\,dy\right) dx = \int_M x^y\,dx\,dy = \int_a^b \left(\underbrace{\int_0^1 x^y\,dx}_{\frac{1}{y+1}}\right) dy$$

$$I = \left[\ln(y+1)\right]_a^b = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

Opakování: substituce pro N. i. (Věta 9.10.)

$f(x): (a,b) \to \mathbb{R}$

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_\alpha^\beta f(\varphi(y))\,|\varphi'(y)|\,dy$$

má-li PS nebo LS smysl

kde $\varphi(y): (\alpha,\beta) \to (a,b)$ vzájemně jednozn.

$\varphi' \neq 0$ v (α,β)

Definice: $\Omega, M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevř. množiny. Zobrazení $\varphi(y): \Omega \to M$ se nazve difeomorfismus, jestliže:

1. φ je vzájemně jednoznačné
2. $\varphi \in C^1(\Omega)$ // spojité parciální derivace
3. $J\varphi \neq 0$ v Ω // J: jakobián

$$J\varphi = \det \nabla\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Věta 18.14. [O substituci]

Nechť $\Omega, M \subset \mathbb{R}^n$ otevřené

Nechť $\varphi(y): \Omega \to M$ je difeomorfismus

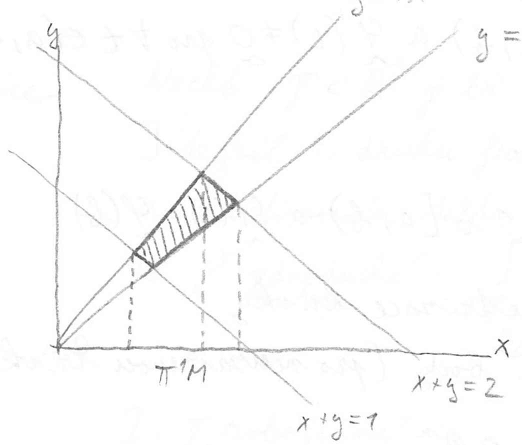
Nechť $f(x): M \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce

Potom
$$\int_M f(x)\,dx = \int_\Omega f(\varphi(y))\,|J\varphi(y)|\,dy$$
má-li jedna strana smysl

$$\int_M f\,d\lambda_n = \int_\Omega (f\circ\varphi)\,|J\varphi|\,d\lambda_n$$

Početní význam: změna integrandu a/nebo oblasti integrace

Příklad: $\lambda_2(M) = ?$



$$\lambda_2(M) = \int_M 1\,dxdy = \overbrace{\int_{\pi^1 M}\left(\int_{M^x} 1\cdot dy\right)dx}^{\text{TO NE}}$$

$$\Psi: (x,y) \longmapsto \left(\underbrace{x+y}_{u}, \underbrace{\frac{y}{x}}_{v}\right)$$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$M \longrightarrow (1,2)\times(3,4) =: \Omega$$

inverzní zobrazení:

$$\varphi = \Psi_{-1}: (u,v) \longrightarrow \left(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}\right)$$

$$\int_M 1\,dxdy = \int_\Omega (1\circ\varphi)\,|J\varphi|\,du\,dv$$ podle v 18.14.

$$J\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = (\dots) = \frac{u}{(1+v)^2}$$

takže
$$\int \underbrace{(1\circ\varphi)}_{\overset{\shortparallel}{1}}\,|J\varphi|\,du\,dv = \int \frac{u}{(1+v)^2}\,du\,dv = \int_1^2 \Bigg(\underbrace{\int_3^4 \frac{u\,dv}{(1+v)^3}}_{g(u)}\Bigg)\,du$$

$$g(u) = u\cdot\left[\frac{-1}{1+v}\right]_{v=3}^{v=4} = u\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$$

celkem $= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\int_1^2 u\,du = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{40}$