17. Lebesgueova míra

míra: množinová funkce $A \longmapsto \mu A$

množina číslo

aditivita: A, B disjunktní $\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

počítací míra: $A \mapsto$ počet prvků A

náš cíl: $A \subset \mathbb{R}^n \mapsto$ objem A

Značení: X ... libovolná množina

2^X ... systém všech podmnožin X

Def. $\mathcal{S} \subset 2^X$ se nazve σ-algebra, jestliže

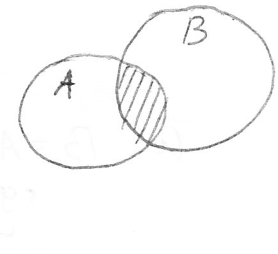
(i) $\emptyset, X \in \mathcal{S}$

(ii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{S}$

(iii) $A_j \in \mathcal{S}, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{S}$

Poznámka: σ-algebra je uzavřená na spočetné průniky

$A, B \in \mathcal{S}$ ... $A \cap B = X \setminus \underbrace{(\underbrace{(X \setminus A)}_{\in \mathcal{S}} \cup \underbrace{(X \setminus B)}_{\in \mathcal{S}\ \text{dle (ii)}})}_{\text{dle (iii)}}$



$B_j \in \mathcal{S}$ ... $\bigcap_j B_j = X \setminus \left(\bigcup_j X - B_j\right)$

Def. X ... libovolná množina. Mírou na X rozumíme funkci

$$\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, \infty]$$ takovou, že platí

(i) $\mathcal{S} \subset 2^X$ je σ-algebra

(ii) $\mu \emptyset = 0$

(iii) $A_j \in \mathcal{S}$; disjunktní $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j$ // σ-aditivita

Terminologie: $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ... prostor s mírou

$\hookrightarrow$ μ-měřitelné množiny

Příklad: ① počítací míra: X … libovolná množina

$$\mathcal{S} = 2^X$$

$$pA := \begin{cases} +\infty ; A \text{ nekonečná} \\ \text{počet prvků } A, \text{ je-li konečná} \end{cases}$$

② Diracova míra: X … libovolná

$$\mathcal{S} = 2^X$$

$$\delta_a A = \begin{cases} 1 ; & a \in A \\ 0 ; & a \notin A \end{cases}$$

③ Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$ („objem")

$(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda_n)$

↳ Lebesgueovsky měřitelné množiny

$\mathfrak{M}_n \neq 2^{\mathbb{R}^n}$ … $\cancel{\exists}$ … $\exists$ neměřitelné množiny

Věta 17.1. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou.
Potom
(i) $A, B \in \mathcal{S}, A \subset B \Rightarrow \mu A \leq \mu B$
(ii) $A_j \in \mathcal{S}; A_j \subset A_{j+1} \Rightarrow \mu(\bigcup_j A_j) = \lim_{j \to \infty} \mu A_j$
(iii) $B_j \in \mathcal{S}, B_j \supset B_{j+1} \Rightarrow \mu(\bigcap_j B_j) = \lim_{j \to \infty} \mu B_j$

dk. (i) $B = \underbrace{\underset{\in \mathcal{S}}{A} \cup \underset{\in \mathcal{S}}{(B \setminus A)}}_{\text{tj. je měřitelná}}$ $\quad B \setminus A = B \cap (X - A)$

disjunktní: $\mu B = \mu A + \mu \underbrace{(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu A$

(ii) trik: zdisjunktníme: $\tilde{A}_1 := A_1$

$\tilde{A}_2 := A_2 \setminus A_1$

obecně

$\tilde{A}_\ell := A_\ell \setminus \bigcup_{j<\ell} A_j$

$\tilde{A}_j$ … disjunktní a platí:

$\bigcup_{j=1}^n \tilde{A}_j = \bigcup_{j=1}^n A_j$, totéž pro $\bigcup_{j \in \mathbb{N}}$

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{A}_j\right) \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu \tilde{A}_j = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \mu \tilde{A}_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu \tilde{A}_j \overset{(*)}{=} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} \tilde{A}_j\right) = \mu\left(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} A_j}_{= A_n}\right) = \mu A_n$$

$(*)$ aditivita

↳ $A_j \subset A_{j+1}$

dk. (iii) pomocné množiny $A_j := B_1 \setminus B_j$

$$B_j \supset B_{j+1} \Longrightarrow A_j \subset A_{j+1}$$

bod (ii): $\mu A_j \to \mu\left(\bigcup_j A_j\right)$; $j \to \infty$

$$B_1 = (B_1 \setminus B_j) \cup B_j = \left(B_1 \setminus \bigcap B_j\right) \cup \bigcap_j B_j \quad \text{disjunktní}$$

$$\underbrace{\mu(B_1 \setminus B_j)}_{=\mu A_j} + \mu B_j = \mu\Big(\underbrace{B_1 \setminus \bigcap B_j}_{\bigcup_j A_j}\Big) + \mu\left(\bigcap_j B_j\right)$$

$$\mu A_j \xrightarrow[j \to \infty]{} \bigcup_j A_j$$

$\Longrightarrow \mu B_j \longrightarrow \mu\left(\bigcap B_j\right)$ ... je pravda, pokud $\mu\left(\bigcup A_j\right) < \infty$,
což je zaručeno z předpokladu $\mu B_1 < \infty$

Poznámka: předpoklad $\mu B_1 < \infty$ je podstatný

p ... počítací míra na $\mathbb{N}$

$B_j = \{j, j+1, j+2, \dots\}$

$$p B_j = \infty \not\to p\Big(\underbrace{\bigcap_j B_j}_{=\emptyset}\Big) = 0$$

Příklad: [Neměřitelná množina v $\mathbb{R}$]

- $\lambda : 2^{\mathbb{R}} \longrightarrow [0, \infty]$ je míra
- $\lambda((a, b)) = b - a \quad \forall a < b$
- λ je translačně invariantní: $\lambda(A) = \lambda(b + A) \ \forall b \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}$

$$b + A = \{b + a, a \in A\}$$

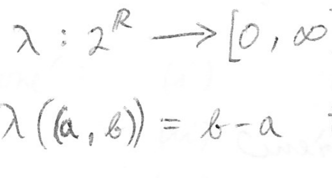
$\sim$ (ekvivalence v $\mathbb{R}$) $\quad x \sim y$ právě když $x - y \in \mathbb{Q}$

platí: $x \sim x$

$x \sim y \Longleftrightarrow y \sim x$

$x \sim y,\ y \sim z \Longrightarrow x \sim z$

$\mathbb{R}$ ... rozpadne se na „přihrádky" vzájemně ekvivalentních čísel



$\mathbb{R}$

Nechť M je selekční množina
(jediný prvek z každé přihrádky)
→ [AXIOM VÝBĚRU]

označme $M_q := q + M$ / získám jinou selekční množinu

platí: $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} M_q$ disjunktní

$\lambda(M) = 0$ nebo $\lambda(M) > 0$

$$\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} M_q\right) \underset{\sigma\text{-aditivita}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda M_q \overset{\text{translační invar.}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda M = 0$$

$\lambda(M) > 0$ ... $A_j := M \cap (-j, j)$

$A_j \subset A_{j+1}$ ... $\lambda(\underbrace{\bigcup_j A_j}_{=M}) = \lim_{j\to\infty} \lambda A_j$

$\Rightarrow \exists j$, že $\lambda A_j > 0$

označme $N := A_j$

$N_\ell = N + \frac{1}{\ell}$; $\ell = 1, 2, \dots$

$N_\ell \subset (-j, j+1)$; disjunktní

$$\lambda\left(\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} N_\ell\right) \le \lambda\left((-j, j+1)\right) = 2j+1$$

$$\parallel$$

$$\sum_\ell \lambda N_\ell = \sum_\ell \underbrace{\lambda N}_{>0} = \infty$$

Banach-Tarského paradox

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ libovolné množiny, otevřené

pak existuje $m \in \mathbb{N}$ a $F_1, \dots, F_m$ disjunktní

$G_1, \dots, G_m$ disjunktní

tak, že $\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^m G_j$; $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^m F_j$

a $F_j = G_j$ až na otočení a posunutí

Def. Interval v $\mathbb{R}$ ... (a, b), $[a, b]$, $(\ ]$, $[\ )$

délka: $\ell_1(I) = b - a$ (včetně neomezených a prázdných)

Interval v $\mathbb{R}^n$ ... $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$

$Q = \{ \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n, x_j \in I_j \}$; $I_j \subset \mathbb{R}$ intervaly

objem: $\ell_n(Q) = \ell_1(I_1) \cdot \ell_1(I_2) \cdot \dots \cdot \ell_1(I_n)$

($n=1$ – délka, $n=2$ – plocha)

s úmluvou

$0 \cdot \infty = 0$

Poznámka [Speciální případy]

$a \in \mathbb{R}^n \dots \{\underset{\sim}{a}\} = [a_1, a_1] \times [a_2, a_2] \times \dots \times [a_n, a_n]$

$\lambda_n(\{\underset{\sim}{a}\}) = 0$

přímka: $\{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^2; x_2 = 0\} = \mathbb{R} \times [0,0]$

$l_2 = 0$

poloprostor $\{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n; x_j \underset{<}{>} c\} = \mathbb{R} \times \dots \times \underset{(-\infty, c)}{(c,\infty)} \times \dots \mathbb{R}$ } otevřený poloprostor

důkaz otevřenosti: $\{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n; x_j > c\} = \varphi^{-1}(\underbrace{(c,\infty)}_{\text{otevřená mn. v } \mathbb{R}})$

$\varphi: \underset{\sim}{x} \to x_j$ spojitá fce

uzavřený poloprostor: $\{x \in \mathbb{R}^n; x_j \underset{\leq}{\geq} c\}$

otevřený interval $Q \subset \mathbb{R}^n$: $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$; $I_j \subset \mathbb{R}$ otevřené

uzavřený int. $Q \subset \mathbb{R}^n$: ——— " ——— uzavřené

Def. [Vnější Lebesguova míra v $\mathbb{R}^n$]

$M \subset \mathbb{R}^n$ libovolné

$$\lambda^*(M) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} l(Q_j);\ Q_j \text{ intervaly};\ M \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j \right\}$$

Zjevně:
(i) $0 \leq \lambda^*(M) \leq +\infty$
(ii) $\lambda^*(\emptyset) = \lambda^*(\{a\}) = 0$
(iii) $\lambda^*(M) = \lambda^*(a+M)$ $\forall a \in \mathbb{R}^n$; $a+M = \{a+m,\ m \in M\}$

Věta 17.2. Nechť $M_j \subset \mathbb{R}^n$ jsou libovolné, $j \in \mathbb{N}$

Potom $\lambda^*(\bigcup_j M_j) \leq \sum_j \lambda^*(M_j)$ [σ-subaditivita]

dk.

BÚNO $\lambda^*(M_j) < \infty$ $\forall j$ (jinak PS $= \infty$ a nerovnost platí)

volme $\varepsilon > 0$ ... $\lambda^*(M_1) + \frac{\varepsilon}{2} > \lambda^*(M_1) = \inf$

$\exists$ $Q_{1,i}$ intervaly ... $M_1 \subset \bigcup_i Q_{1,i}$

$\sum_i l(Q_{1,i}) < \lambda^*(M_1) + \frac{\varepsilon}{2}$

obecně $\forall j$ ... $\exists$ $Q_{j,i}$ ... intervaly $M_j \subset \bigcup_i Q_{j,i}$

$\sum_i l(Q_{j,i}) < \lambda^*(M_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$

$$M := \bigcup_j M_j \subset \bigcup_{i,j} Q_{j,i} \quad \text{spočetné sjednocení}$$

$$\lambda^*(M) \le \sum_{i,j} \ell(Q_{j,i}) = \sum_j \Big(\sum_i \ell(Q_{j,i})\Big) \le \sum_j \Big(\lambda^*(M_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\Big) = \sum_j \lambda^*(M_j) + \varepsilon$$

ε libovolně malé $\Rightarrow$ závěr

Poznámka: řada s ≥ 0 členy $\Rightarrow$ nezáleží na pořadí sčítání

PROBLÉM: $Q \subset \mathbb{R}^n$ interval $\overset{?}{\Longrightarrow} \ell(Q) = \lambda^*(M)$

$\ge$ jasné

Lemma 17.1. [O konečném podpokrytí]

(X, ρ) metrický prostor

$K \subset X$ kompaktní

$K \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$; A_j otevřené

Pak $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tak, že $K \subset \bigcup_{j=1}^n A_j$

dk. sporem:

$$\underbrace{K \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j}_{\text{volme } x_n} \ne \emptyset \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

K-kompaktní: $\exists\, x_0 \in K$; hromadný bod

tj. $\forall \varepsilon > 0 \dots x_n \in U(x_0, \varepsilon)$ pro nekonečně n

$A_j \cdots$ pokrytí: $\exists\, m$; $x_0 \in A_m \cdots$ otevřená

$\exists\, \varepsilon > 0 \dots U(x_0, \varepsilon) \subset A_m$

ale $\dots$ $n \ge m$: $x_n \in K \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j \subseteq K \setminus A_m$

tedy $x_n \notin U(x_0, \varepsilon)$; $n \ge m$: SPOR

Poznámka: K je kompaktní $\Leftrightarrow$ každé otevřené pokrytí má konečné podpokrytí

Lemma 17.2. $Q, Q_j \subset \mathbb{R}^n$ intervaly, $Q \subset \bigcup_j Q_j$

Potom

$$\ell(Q) \le \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j)$$

dk. 1. nechť $\underbrace{Q \text{ je omezený \& uzavřený}}$; Q_j otevřené

$\Rightarrow Q$ je kompaktní (neboť $X = \mathbb{R}^n$, eukleidovský prostor)

$L.17.1 \longrightarrow \exists\, n \in N \quad Q \subset \bigcup_{j=1}^{n} Q_j$

zřejmě

$$\ell(Q) \leq \sum_{j=1}^{n} \ell(Q_j)$$

tím spíše

$$\ell(Q) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j)$$

2. nechť Q, Q_j jsou libovolné; navíc $\ell(Q) < \infty$

$\varepsilon > 0$ dáno: volme $\tilde{Q}_j \supset Q_j$ otevřené; $\ell(\tilde{Q}_j) < \ell(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$

$\tilde{Q} \subset Q$; $\tilde{Q}$ omez, uzavř; $\ell(\tilde{Q}) > \ell(Q) - \varepsilon$

zřejmě: $\tilde{Q} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j$; dle 1. $\ell(\tilde{Q}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(\tilde{Q}_j)$

$\ell(Q) - \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j) + \underbrace{\sum_j \frac{\varepsilon}{2^j}}_{=\varepsilon}$; ε .. libovolně malé

$\Rightarrow$ závěr

3. nechť $\ell(Q) = +\infty$

$c > 0$ libovolné ... volme $\tilde{Q} \subset Q$; $c < \ell(\tilde{Q}) < \infty$

zřejmě $\tilde{Q} \subset \bigcup_j Q_j$ ... dle 2. $\ell(\tilde{Q}) \leq \sum_j \ell(Q_j)$

tedy $c < \underbrace{\sum_j \ell(Q_j)}$

c libovolné $\Rightarrow \; = \infty$

Důsledek: $Q \subset \mathbb{R}^n$ interval $\Rightarrow \lambda^*(Q) = \ell(Q)$

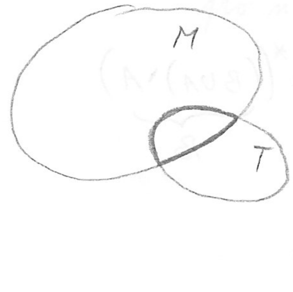
dk: „$\leq$" zřejmé (pokrytí $Q_1 = Q$; $Q_2 = Q_3 = \dots = \emptyset$)

„$\geq$" Lemma 17.2.

Def. $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazve měřitelná (podle Carathéodoryho)

jestliže pro každou $T \subset \mathbb{R}^n$ platí // T - testovací množina

$\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap M) + \lambda^*(T \setminus M)$ // $\leq$ platí vždy (V 17.2.)



Věta 17.3. [Carathéodoryova]

Označme $\mathcal{M} = \{ M \subset \mathbb{R}^n ;\ M$ je měřitelná dle Car. $\}$

Potom $\mathcal{M}$ je σ-algebra a $\lambda^*|_{\mathcal{M}}$ je míra

Dk. cíle: $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$

$A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ // $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

$A_j \in \mathcal{M} ; j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_j A_j \in \mathcal{M}$

$\lambda^* \emptyset = 0$

$A_j \in \mathcal{M}$ disj. $\Rightarrow \lambda^*(\bigcup_j A_j) = \sum_j \lambda^*(A_j)$

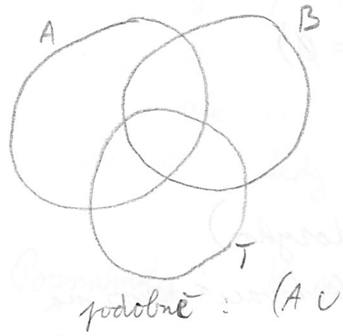
1. $\emptyset \in \mathcal{M}$: $\lambda^*(T) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{\lambda^*}(\underbrace{T \cap \emptyset}_{\emptyset}) + \lambda^*(\underbrace{T \setminus \emptyset}_{T})$

$A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$: $\lambda^*(T) = \lambda^*(\underbrace{T \cap A^c}_{T \setminus A}) + \lambda(\underbrace{T \setminus A^c}_{T \cap (A^c)^c = T \cap A}) \overset{A \in \mathcal{M}}{=} \lambda^*(T)$

$\to$ spec. $\mathbb{R}^n = \emptyset^c \in \mathcal{M}$

2. $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$ // průnik měřitelných je měřitelná

$(\square)\ \begin{cases} (+) & A \in \mathcal{M} ; \text{ testuji } T : \quad \lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \cap A^c) \\ (+) & B \in \mathcal{M} ; \text{ test } T \cap A : \quad \lambda^*(T \cap A) = \lambda^*((T \cap A) \cap B) + \lambda^*((T \cap A) \cap B^c) \\ (-) & A \in \mathcal{M} ; \text{ test } T \cap (A \cap B^c) : \quad \lambda^*((T \cap (A \cap B^c)) = \lambda^*(\underbrace{T \cap (A \cap B^c) \cap A}_{A \cap T \cap B^c}) + \lambda^*(\underbrace{T \cap (A \cap B^c) \cap A^c}_{T \cap A^c}) \end{cases}$



$(\square)\ \lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap (A \cap B)) + \lambda^*(T \cap (A \cap B)^c)$

T libovolné $\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$

podobně: $(A \cup B) = ((A \cup B)^c)^c = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{M}$ dle 1., 2.

3. aditivita: $A, B \in \mathcal{M}$; disjunktní

$A \in \mathcal{M}$; testuji $B \cup A$: $\lambda^*(B \cup A) = \lambda^*(\underbrace{B \cup A \cap A}_{A}) + \lambda^*(\underbrace{(B \cup A) \setminus A}_{B})$

indukce: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$, disj.

$\lambda^*(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \lambda^*(A_1) + \dots + \lambda(A_n)$

3'. σ - aditivita : $\leq$ platí vždy (V. 17.2)

opačně : $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda^*(A_j)$ // definice Σ

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)}_{\leq \lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)}$$ // konečně-aditivní-

$\forall n$ pevné

a tedy $\lim_{n\to\infty}$ — " — $\Rightarrow$ platí $\boxed{\geq}$

4. $A_j \in \mathfrak{M}, j \in N \Rightarrow \bigcup_j A_j \in \mathfrak{M}$

BÚNO: A_j disjunktní (jinak $\tilde{A}_j := A_j \setminus \bigcup_{l<j} A_l$; zjevně $\bigcup_j A_j = \bigcup_j \tilde{A}_j$; $\tilde{A}_j \in \mathfrak{M}$ - konečné operace)

Cíl: $\lambda^*(T) = \lambda^*\left(T \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \lambda^*\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$; $\forall T \subset R^n$

$\leq$ platí vždy (V.17.2.)

dokažme $\geq$

pomocná rovnost : (P_n) $\lambda^*(T) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*(T \cap A_j) + \lambda^*\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$

indukcí (P_1) : $\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A_1) + \lambda^*(T \setminus A_1)$

... měřitelnost A_1

$A_{n+1} \in \mathfrak{M}$, testuji $T \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j$

$$\lambda^*\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \lambda^*\Big(\underbrace{\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cap A_{n+1}}_{T \cap A_{n+1}}\Big) + \lambda^*\Big(\underbrace{\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \setminus A_{n+1}}_{T \setminus \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j}\Big)$$

A_j ... disj.

dosazením do $(P_n) \to (P_{n+1})$

$$\lambda^*(T) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*(T \cap A_j) + \underbrace{\lambda^*\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)}_{\geq \lambda^*\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)}$$

pro $n \to \infty$ $\quad \lambda^*(T) \geq \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(T \cap A_j)}_{\geq \lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} T \cap A_j\right) = \lambda^*\left(T \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)} + \lambda^*\left(T \setminus \bigcup_j A_j\right)$

V.17.2.

Terminologie: $\mathcal{M}$ ... Lebesgueovsky měřitelné množiny

Lebesgueova míra λM: $\begin{cases} \lambda^* M & ; M \in \mathcal{M} \\ \text{není definováno} & ; M \notin \mathcal{M} \end{cases}$

$M \subset \mathbb{R}^n$

Lemma 17.3. Každý interval $Q \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelný a $\lambda(Q) = \ell(Q)$

dk. stačí měřitelnost ($\Rightarrow \lambda(Q) = \lambda^*(Q) = \ell(Q)$) ↳ již víme

1. krok Q... poloprostor $\{x \in \mathbb{R}^n; x_j > c\}$

cíl: $\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap Q) + \lambda^*(T \setminus Q) \quad \forall T$

BÚNO: dokazujeme $\geq$

nechť navíc $\lambda^*(T) < \infty$

$\varepsilon > 0$ dáno:

pokrování: $T \cap Q \subset \bigcup_j P_j$; $P_j = Q_j \cap Q_j$ } intervaly

$T \setminus Q \subset \bigcup_j R_j$; $R_j = Q_j \setminus Q_j$

$\Rightarrow \lambda^*(T \cap Q) \leq \sum_j \ell(P_j) = \sum_j \ell(Q_j \cap Q)$

$\lambda^*(T \setminus Q) \leq \sum_j \ell(R_j) = \sum_j \ell(Q_j \setminus Q)$

$\lambda^*(T \cap Q) + \lambda^*(T \setminus Q) \leq \sum_j \ell(Q_j) < \lambda^*(T) + \varepsilon$ – libovolné $\Rightarrow$ závěr

2. krok $Q \subset \mathbb{R}^n$... obecný interval ... $Q = \bigcap_{j=1}^{2n} Q_j$; Q_j vhodné poloprostory

$Q_j \in \mathcal{M}$ dle 1., $\mathcal{M}$ je σ-algebra (v. 17. 3.)

Věta 17.4. [Další vlastnosti λ]

1. Otevřené a uzavřené množiny jsou měřitelné
2. λ je translačně invariantní
3. λ je rotačně invariantní

dk. 1 a: $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená $\Rightarrow G \in \mathcal{M}$

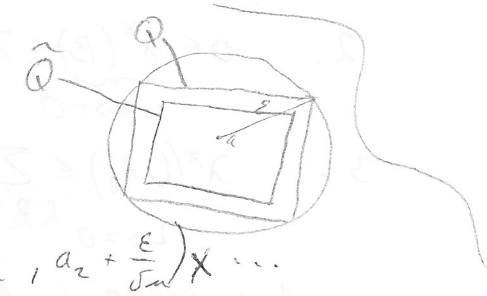
$\mathcal{R}_1 = \{I \subset \mathbb{R}; I = (a,b); a, b \in \mathbb{Q}\}$

$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_1 = \{Q \subset \mathbb{R}^n; Q = I_1 \times \dots \times I_n; I_j \in \mathcal{R}_1\}$

„racionální otevřené intervaly"

$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_n$ ... spočetné systémy množin ($\mathbb{Q}$ ... spočetná)

$G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená: $\boxed{G = \bigcup_{Q \in \mathcal{R}_n;\, Q \subset G} Q} \Rightarrow$ spočetné sjednocení; $\doteq$



„$\supset$" zjevné

„$\subset$" ... nechť $a \in G$ otevřená

$\exists \varepsilon > 0 \dots U(a, \varepsilon) \subset G$

$\Rightarrow \tilde{Q} = \left(a_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, a_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \times \left(a_2 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, a_2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \times \dots$

$\Rightarrow \exists$ racionální Q; $a \in Q \subset \tilde{Q}$

1.b: $F \subset \mathbb{R}^n$ uzavř. $\Rightarrow F = \underbrace{\underset{\in \mathcal{M}}{\mathbb{R}^n} \setminus \underset{\in \mathcal{M}}{G}}_{\in \mathcal{M} \dots \sigma\text{-algebra}}$; G otevř.

2 $\quad A \in \mathcal{M} \Rightarrow a + A \in \mathcal{M}$, $\lambda(a+A) = \lambda(A)$

víme λ^* je transl. inv.

$A \in \mathcal{M}$; testuji $(-a+T)$: $\lambda^*(-a+T) = \lambda^*((-a+T) \cap A) + \lambda^*((-a+T) \setminus A)$

$\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap (a+A)) + \lambda^*(T \setminus (a+A))$

$\dots a + A \in \mathcal{M}$

$\lambda(a+A) = \lambda^*(a+A) = \lambda^*(A) = \lambda(A)$

$\hookrightarrow A, a+A \in \mathcal{M}$

Poznámka: $G \neq \emptyset$ otevř. $\Rightarrow \lambda(G) > 0$

$\lambda(G) \geq \lambda(\tilde{Q}) = \left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^n > 0$

Def. $\quad A \subset \mathbb{R}^n$ se nazve množina míry nula (nulová množina), jestliže $A \in \mathcal{M}$ a $\lambda(A) = 0$.

Věta 17.5. [Nulové množiny v $\mathbb{R}^n$]

1. A je nulová $\Leftrightarrow \lambda^*(A) = 0$
2. A nulová, $B \subset A \Rightarrow B$ nulová
3. A_j nulová, $j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_j A_j$ nulová

speciálně: spočetné množiny jsou nulové

dk. $\quad$ 1. $\quad A \in \mathcal{M}$, $\lambda(A) = \lambda^*(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda^*(A) = 0$

„$\Rightarrow$" jasné

„$\Leftarrow$": $\lambda^*(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{M}$: $\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \setminus A)$

$\leq$ platí vždy

opačně $\quad \underbrace{\lambda^*(T \cap A)}_{\subset A} + \underbrace{\lambda^*(T \setminus A)}_{\subset T} \leq \underbrace{\lambda^*(A)}_{=0} + \lambda^*(T)$

tj. platí $\geq$

2. $0 \le \underbrace{\lambda^*(B)}_{\Rightarrow = 0} \le \lambda^*(A) = 0$ díky 1

3. $\underbrace{\lambda^*(\bigcup A_j)}_{\Rightarrow = 0} \le \sum_j \lambda^*(A_j) = 0$

A spočetná: $A = \{a_j ; j \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{a_j\}$

ale víme $\lambda^*(\{a_j\}) = 0$ (speciální interval)

Poznámka: $\lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$

$\lambda_1((a,b) \setminus \mathbb{Q}) = \lambda_1(a,b) = b - a$

Def. $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná. Řekneme, že výrok $V(x)$ platí skoro všude v M, jestliže existuje nulová množina $N \subset M$ tak, že $V(x)$ platí pro $\forall x \in M \setminus N$

skoro všude = (s.v.) = λ-skoro všude = λ_n-s.v.

Příklady ① $\sin x \neq 0$ s.v. v $\mathbb{R}$ ($N = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$)

$\Rightarrow$ spočetná $\Rightarrow$ nulová

② skoro všechna čísla jsou iracionální ($N = \mathbb{Q}$)

③ $\varphi: (x,y) \mapsto |x| + |y|$ je diferencovatelná s.v. v $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad N = \{(x,y), x = 0 \vee y = 0\}$

– dva nulové intervaly

poznámka: prostor s mírou: ~~(X, m, μ)~~

$(X, \mathcal{S}, \mu)$

X – obecná množina

$\mathcal{S}$ – měřitelné množiny, σ-algebra
- $\emptyset, X \in \mathcal{S}$
- $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^c \in \mathcal{S}$
- $A_j \in \mathcal{S}, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_j A_j \in \mathcal{S}$

μ – míra
- $\mu\,\emptyset = 0$
- $A_j \in \mathcal{S}, j \in \mathbb{N}$ disjunktní
- $\mu(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu A_j$ σ-aditivita

Lebesgueova míra $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \lambda)$

$\mathcal{M}$ ... lebesgueovsky měř. množiny

$\mathcal{M} \neq 2^{\mathbb{R}^n}$; ale je dost bohatý

λ ... translačně, rotačně invariantní

navíc $\lambda(\alpha A) = \alpha^n \lambda(A)$

$\alpha A = \{\alpha \cdot a, a \in A\}$; $\alpha > 0$