16. VARIAČNÍ POČET

funkce $F : M \to \mathbb{R}$

funkcionál $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$

$\cap X$ ... nekonečně dim. prostor (často prostor funkcí)

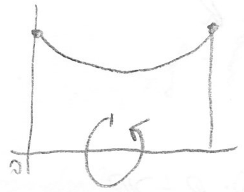
Def. [Základní úloha]

(U) $\mathcal{M} := \{ y \in C^1([a,b]) ; y(a) = A ; y(b) = B \}$

$$\phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

$$f = f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Příkl. ① $\phi(y) = 2\pi \int_0^1 |y(x)| \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx$



$\mathcal{M} = \{ y \in C^1 ; y(0) = y(1) = A \}$

min = ?

„minimální rotační plocha"

② $\phi(y) = \int_0^1 y\, dx \quad \mathcal{M} = \{ y \in C^1 ; y(0) = y(1) = 0 \} \cap \{ \Psi(y) = \ell \}$

$$\Psi(y) = \int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx \qquad \ell \geq 1 \text{ dáno}$$

max = ?

$\phi : \underset{\cap}{M} \to \mathbb{R}$ „funkcionál"

X, ... $(X, \|\cdot\|)$ ... normovaný prostor

okolí: $U(x_0, \delta) = \{ x \in X ; \|x - x_0\| < \delta \}$

$x_0 \in X$, $\delta > 0$ $\quad P(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

$[x \in M ; \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon$

$x_0 \in M$ je glob. min ϕ vůči M: $\phi(x) \geq \phi(x_0)$ pro $\forall x \in M$

lokální min $\quad \exists \delta > 0 : \phi(x) \geq \phi(x_0)$ pro $\forall x \in U(x_0, \delta) \cap M$

ostré lok. min $\quad \exists \delta > 0 : \phi(x) > \phi(x_0)$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta) \cap M$

— maximum analogicky

Def.: $\phi(x) : M \to \mathbb{R}$; $M \subset X$; kde $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný prostor

- 1. Nechť $x_0, h \in X$. Limita (pokud existuje)

$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\phi(x_0 + th) - \phi(x_0)]$ se nazývá Gateaux-ův diferenciál ϕ v bodě x_0 ve směru h

Značí se $D\phi(x_0; h)$

Ekvivalentně: $D\phi(x_0; h) = \varphi'(0)$, kde $\varphi = \varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(t) = \phi(x_0 + th)$

- 2. Nechť $x_0 \in X$. Existuje-li spojité lineární zobrazení $A : X \to \mathbb{R}$, splňující $\phi(x_0 + h) = \phi(x_0) + A(h) + o(\|h\|)$ $\quad h \to 0$

tj. $$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) - A(h)}{\|h\|} = 0$$

pak A se nazve Fréchetův diferenciál ϕ v bodě x_0

značí se $\phi'(x_0)$

Poznámky: $X = \mathbb{R}^n$: Gateaux = derivace ve směru

Fréchet = totální diferenciál

obecně platí: $\exists \phi'(x_0) \Rightarrow \exists D\phi(x_0, h)$ pro $\forall h$ a

$D\phi(x_0, h) = [\phi'(x_0)](h)$

$\Rightarrow \phi$ spojité v bodě x_0

!! $\exists \phi'(x_0)$ .... M musí obsahovat $U(x_0, \delta)$

$D\phi(x_0, h)$ ... M musí obsahovat $x_0 + th$ pro $t \in (-\delta, \delta)$

(slabší předpoklad)

Věta 16.1. Nechť $\Phi: \overset{+}{\underset{\cup}{M}} \to \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in M$ lokální extrém vůči M. Nechť $h \in X$. Pokud existuje $D\Phi(x_0,h)$, je nutně roven 0.

dk.

$$\varphi(t) := \Phi(x_0 + th)$$

$\exists D\Phi(x_0,h) \ldots x_0 + th \in M$ pro $t \in (-\delta, \delta)$; $\delta > 0$ malé

$x_0 \ldots$ extrém Φ vůči $M \cap U(x_0, \varepsilon)$; $\varepsilon > 0$ malé

$\Rightarrow$ 0 je extrém $\varphi(t)$ vůči $(-\varepsilon, \varepsilon)$

$\Rightarrow$ $\varphi'(0) = 0$ (víme, že existuje a $= D\Phi(x_0,h)$)

Základní úloha var. počtu

(U) max / min $\quad \Phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx$

vzhledem k $M = \{ y(x) \in C^1([a,b]) \}$, $y(a) = A$, $y(b) = B$

$f = \{ f(x,y,z) \ldots$ fce vytvářející funkcionál Φ

Poznámka: $C(I) \ldots y(x): I \to \mathbb{R}$ spojitá

$C^1(I) \ldots y, y': I \to \mathbb{R}$ spojité : problém s uzavřeným intervalem

b není definováno $y'(b) = ?$

2 možnosti ($\Leftrightarrow$)

1/ $C^1([a,b]) := \{ y \in C([a,b]);\ y' \in C((a,b));\ \exists$ vlastní $\lim_{x\to a+} y'(x), \lim_{x \to b-} y'(x) \}$

2/ $C^1([a,b]) := \{ y: [a,b] \to \mathbb{R};\ \exists \tilde{y} \in C^1(\mathbb{R});\ \tilde{y}|_{[a,b]} = y \}$

$X = C^1([a,b])$, $\|y\| = \sup_{x \in (a,b)} \{ |y(x)| + |y'(x)| \}$

$C_0^1([a,b]) = \{ y \in C^1([a,b]);\ y(a) = y(b) = 0 \}$

Věta 16.2. Je dána úloha (U). Nechť $y_0 \in M$, $h \in C_0^1([a,b])$, $f \in C^1$. Potom existuje $D\Phi(y_0,h)$ a je roven

$$\int_a^b f_y(x, y_0(x), y_0'(x))\, h(x) + f_z(x, y_0(x), y_0'(x))\, h'(x)\, dx$$

kde $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

dk. $D\Phi(y_0, h) = \varphi'(0)$; $\varphi(t) = \Phi(\underbrace{y_0 + th}_{\in M\ \forall t \in R})$

$y_0, h \in C^1$

$(y_0 + th)(a) = y_0(a) + t\underbrace{h(a)}_{0} = A$

$$\varphi(t) = \Phi(y_0 + th) = \int_a^b f\underbrace{(x, \overbrace{y_0(x) + th(x)}^{y}, \overbrace{y_0'(x) + th'(x)}^{z})}_{g(t,x)}\, dx$$

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^b g(t,x)\, dx = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\, dx$$

↳ ověříme později

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x)) \cdot h(x) + \frac{\partial f}{\partial z}(\dots)\, h'(x)$$

pevné

spec. $\varphi'(0) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(0,x)\, dx$

$\Downarrow$

závěr

Diracova funkce: $\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$

(neexistuje) $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\, dx = 1$

Lemma 16.1. Nechť $\varphi(x)$ je libovolná omezená funkce s omezeným nosičem*, nechť $f(x)$ je spojitá v bodě x_0

*(a $\int_R \varphi(x)\, dx = 1$)

Označme $\varphi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$. Potom

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_R f(x_0 + y)\, \varphi_\varepsilon(y)\, dy = f(x_0)$$

Nosič fce: $\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in R ; \varphi(x) \neq 0\}}$

dk.: $\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)dy = \left| x = y/\varepsilon \right| = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$

$|\varphi(x)| \le K$; supp $\varphi \subset [-K, K]$

$|\varphi_\varepsilon(\cancel{x})| \le \frac{K}{\varepsilon}$; supp $\varphi_\varepsilon \subset [-\varepsilon K, \varepsilon K]$

chl $\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0 : \varepsilon \in (0,\delta) \Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}} f(x_0+y)\varphi_\varepsilon(y) - f(x_0) \right| < \eta$

spojitost f v x_0: $\exists \delta > 0 : |f(x_0) - f(z)| < \frac{\eta}{2K^2}$ pro $\forall z \in U(x_0, K\delta)$

tedy:
$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x_0+y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy - f(x_0) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} [f(x_0+y) - f(x_0)]\varphi_\varepsilon(y)\,dy \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{subst.} \\ y = x\varepsilon \\ dy = \varepsilon dx \end{array} \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} [f(x_0+\varepsilon x) - f(x_0)]\varphi(\cancel{x})\,d\cancel{x} \right| =$$

$$= K \int_{-K}^{K} |\underbrace{f(x_0+\varepsilon x)}_{\in U(x_0, K\delta)} - f(x_0)|\,dx \le K \cdot 2K \cdot \frac{\eta}{2K^2} = \eta$$

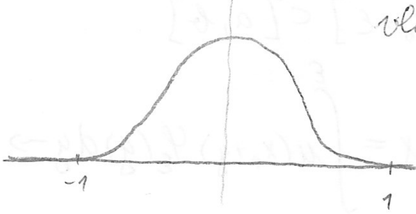
$\varepsilon \in (0, \delta)$

Důsledek: $f(x)$ spojitá v x_0: $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx = f(x_0)$ $\left(\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \right)$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = f(x_0)$ $\left(\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \right)$

Důležitá konstrukce: Sklazovací funkce (mollifier, bump function)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & ; |x| \ge 1 \\ c \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & ; |x| < 1 \end{cases}$$



vlastnosti:

- $\varphi(x) \ge 0$ v $\mathbb{R}$
- $\varphi(x) > 0$ v $(-1,1)$; $= 0$ jinde
- $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $\int \varphi = \int_{-1}^{1} \varphi = 1$ (vhodná volba $C > 0$)

proč je $\varphi \in C^\infty$: zjevně C^∞ v $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$

ale není zjevné: $\exists$ & spoj $\varphi^{(n)}$ v $x=\pm 1$

$$\varphi(1)=0\ ; \quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1+} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1-}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1-} C \exp\underbrace{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}_{\to 0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{spojitá (oboustranně) v } x=1$$

<0 na $P_-(1,\delta)$

$$\varphi'(1) = \lim_{x\to 1}\varphi'(x) \ (\text{pokud P.S. má smysl})$$

zprava: $\lim\limits_{x\to 1+}\varphi'(x) = \lim\limits_{x\to 1+} 0 = 0$

zleva: $\lim\limits_{x\to 1-}\varphi'(x) = \lim\limits_{x\to 1-} C\cdot \underbrace{\frac{-2x}{(x^2-1)^2}}_{\to -\infty}\underbrace{\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}_{\to 0 \text{ jako předtím}} = 0$

ale exp je silnější

indukcí: $\varphi^{(k)}(1)=0$

Lemma 16.2. [Slabá formulace dif. rce]

1. Nechť $u(x)\in C([a,b])$. Potom $u\equiv 0$ v $[a,b]$ právě když
$$\int_a^b u(x)\,h(x)\,dx = 0 \quad \forall h\in C_0^1([a,b])$$

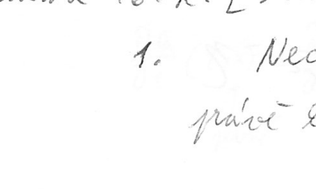
2. Nechť $w(x)\in C^1([a,b])$, $v(x)\in C([a,b])$. Potom $-w'+v\equiv 0$ v $[a,b]$ právě když
$$\int_a^b w(x)\,h'(x) + v(x)\,h(x)\,dx = 0 \quad (++)$$
pro $\forall h\in C_0^1([a,b])$

dk. 1. „$\Rightarrow$" zjevné, integrand $=0$

„$\Leftarrow$"

zvolme $x_0\in(a,b)$ libovolné

$h(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$ // φ - modifikátor, viz (22)



$h(x)\in C_0^1([a,b])$ pro ε malé

$\operatorname{supp} h = [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\subset[a,b]$

$$0 = \int_a^b u(x)h(x)\,dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u(x)\frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(x_0+y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy \xrightarrow[\substack{L16.1.\\ \varepsilon\to 0+}]{} u(x_0)$$

tj. $u(x_0)=0 \ \forall x_0\in(a,b)$

ze spojitosti: $u(a) = \lim\limits_{x \to a+} \underbrace{u(x)}_{=0 \text{ na } P_+(a,\delta)} = 0$

$\} \Rightarrow u \equiv 0$ v $[a,b]$

dk. 2. per-partes: $\displaystyle\int_a^b w(x)h'(x)\,dx = \underbrace{\left[w(x)h(x)\right]_a^b}_{w(b)h(b) - w(a)h(a)} - \int_a^b w'(x)h(x)\,dx$

$w(b)h(b) - w(a)h(a)$: $\underbrace{h(b)}_{=0}$, $\underbrace{h(a)}_{=0}$ z předpokladu

$$(++) \Leftrightarrow \int_a^b \underbrace{[-w'(x)+v(x)]}_{u(x)}h(x)\,dx = 0 \quad \forall h \in C_0^1([a,b])$$

dle části 1. $\Leftrightarrow u \equiv 0$ v $[a,b]$; neboť $-w'+v \in C([a,b])$

výrok platí

Připomenutí:

$$(U) \qquad \phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx$$

$$y \in M = \{y \in C^1([a,b]);\ y(a)=A,\ y(b)=B\}$$

Věta 16.3. [Euler - Lagrange]
Nechť y je lokální extrém úlohy (U)
Předpokládejme navíc, že $y \in C^2$, $f \in C^2$.
Potom y splňuje v $[a,b]$ diferenciální rovnici

$$(E.L.) \qquad -\frac{d}{dx}\left\{f_z(x, y(x), y'(x))\right\} + f_y(x, y(x), y'(x)) = 0$$

$$// \ f_z = \frac{\partial f}{\partial z},\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y};\ f = f(x,y,z)$$

Def. Předchozí rovnice se nazývá Euler - Lagrangeova rovnice úlohy (U).
Každé její řešení, náležící do M (tj. splňující $y(a)=A$, $y(b)=B$)
se nazývá extremála úlohy (U).

dk. (V.16.3.)

$$V\,16.2.: \ \exists\, D\phi(y,h) = \int_a^b f_z(x,y,y')h' + f_y(x,y,y')h \, dx$$

$$V\,16.1. \quad D\phi(y,h) = 0 \quad \forall\, h \in C_0^1([a,b])$$

$$\text{tj.} \quad 0 = \int_a^b \underbrace{\underbrace{f_z(x,y(x),y'(x))}_{w(x)\in C^1} h'(x) + \underbrace{f_y(x,y(x),y'(x))}_{v(x)\in C}}\, h(x)\, dx \quad \forall\, h\in C_0^1([a,b])$$

$$L.16.2.: \Rightarrow -w' + v = 0 \ \text{v} \ [a,b)$$

neboli: (E.L.) platí.

Příklad. $\phi(y) = \int_0^{\pi} (y'+y)^2 + 2y\sin x \, dx$

$$M = \{ y \in C^1([0,\pi]);\ y(0)=0,\ y(\pi)=1 \}$$

(E.L.) $f = (z+y)^2 + 2y\sin x$

$f_z = 2(z+y)$

$f_y = 2(z+y) + 2\sin x$

$$-(2(y'+y))' + 2(y'+y) + 2\sin x = 0$$

$$-2y'' - \cancel{2y'} + \cancel{2y'} + 2y + 2\sin x = 0$$

tedy: $y'' - y = \sin x$

charakt. polynom $\lambda^2 - 1 = 0$

f.s. $\{e^x, e^{-x}\}$

řešení homogenní úlohy: kombinace členů f.s. (lineární)

$y_p = A\cos x + B\sin x$ ….. dosazením $y_p = \frac{1}{2}\sin x$

obecné řešení (E.L.)

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$$

extremála: okrajové podmínky: $y(0) = 0 = C_1 + C_2$

$$y(\pi) = 1 = C_1 e^{\pi} + C_2 e^{-\pi}$$

$$\Rightarrow C_1 = -C_2 = \frac{1}{e^{\pi} - e^{-\pi}}$$

tj. jediná extremála $y_0(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \dfrac{1}{2}\sin x$

čili $y_0(x)$ je jediný kandidát na extrém

Věta 16.4 [Legendre]

Je dána úloha (U)

Nechť $y \in C^2$, $f \in C^2$

Potom 1. y je lok. minimum $\Rightarrow f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

2. y je lok. maximum $\Rightarrow f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$

dk.

$$\varphi(t) := \Phi(\underbrace{y + th}_{\hookrightarrow \text{ určíme později}})$$

$\varphi(t)$ má v $t=0$ lok. min $\overset{\text{1. semestr}}{\Longrightarrow}$ $\varphi'(0) = 0$

(okolí $(-\delta, \delta)$) $\qquad \varphi''(0) \geq 0$

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\Phi(y+th) = \frac{d}{dt}\int_a^b f(x, y+th, y'+th')\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}(\ \ )\,dx$$

$$= \int_a^b f_y(x, y+th, y'+th')h + f_z(x, y+th, y'+th')h'\,dx$$

$$\varphi''(t) = \int_a^b f_{yy}(x, y+th, y'+th')h^2 + f_{yz}(\dots)hh' + f_{zy}(\dots)h'h + f_{zz}(\dots)(h')^2\,dx$$

$$f \in C^2 \Rightarrow f_{yz} = f_{zy}$$

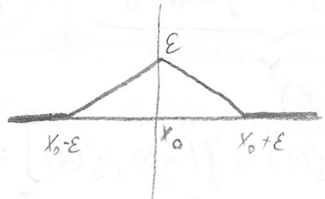
pak

$$0 \leq \varphi''(0) = \int_a^b f_{yy}(x,y,y')h^2 + 2f_{yz}(x,y,y')hh' + f_{zz}(x,y,y')(h')^2\,dx$$

// mimochodem $= D^2\Phi(y, h, h)$

vezmi $x_0 \in (a,b)$

$h = h_\varepsilon$



$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon - |x - x_0| & ; x \in U(x_0, \varepsilon) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

je pravda $0 \leq \frac{1}{2\varepsilon}\varphi''(0) = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon)$

ze spojitosti: $|f_{yy}(\dots)| \leq K$

$|f_{yz}(\dots)| \leq K$

$|h_\varepsilon| \leq \varepsilon$, přesněji $|h_\varepsilon| = \begin{cases} \leq \varepsilon & x \in U(x_0, \varepsilon) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$|h_\varepsilon'| = \begin{cases} 1 & x \in U(x_0, \varepsilon) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$$|I_1(\varepsilon)| \leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\cancel{a}\ \text{stačí}\ x_0-\varepsilon}^{\cancel{b}\ x_0+\varepsilon} \underbrace{|f_{yy}(\dots)|}_{\leq K}\underbrace{|h|^2}_{\varepsilon}\,dx \leq \frac{1}{2\varepsilon}\cdot 2\varepsilon K \varepsilon^2 = K\varepsilon^2 \longrightarrow 0$$

$$|I_2(\varepsilon)| \le \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \underbrace{|f_{yz}(\dots)|}_{\le K}\,\underbrace{|h|}_{\le\varepsilon}\underbrace{|h'|}_{=1}\, dx \le \frac{1}{\cancel{2\varepsilon}}\cdot\cancel{2\varepsilon}\cdot K\varepsilon \to 0$$

$$I_3(\varepsilon)=\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\underbrace{f_{zz}(x,y(x),y'(x))}_{\text{spojitá v } x_0}\overbrace{(h')^2}^{=1}\, dx \xrightarrow{L\,16.1.} f_{zz}(x_0,y(x_0),y'(x_0))$$

celkem: $0 \le \underbrace{I_1(\varepsilon)}_{\to 0} + \underbrace{I_2(\varepsilon)}_{\to 0} + \underbrace{I_3(\varepsilon)}_{\to f_{zz}(x_0,y(x_0),y'(x_0))} \quad / \ \varepsilon \to 0+$

v limitě: $0 \le f_{zz}(x_0,y(x_0),y'(x_0))$ $\quad x_0$ libovolné $\to$ závěr.

Poznámka: proto extrém z předchozího příkladu <u>není</u> maximum

Poznámka: $\exists$ extrém a je C^2: NETRIVIÁLNÍ ÚLOHY

obecně: $F: M \to \mathbb{R}$ spoj.; M kompakt $\Rightarrow \exists$ glob. extrémy

$M \subset \mathbb{R}^n$ omezená & uzavřená $\Rightarrow$ kompakt

ale pro $(X, \|\cdot\|)$ nekonečně dimensionální (např. $C[a,b]$)

$\{y \in X;\ \|y\| \le \varepsilon\}$ není kompaktní

Lemma 16.3. Nechť f nezávisí na x, $y \in C^2$, $f \in C^2$. Potom každé řešení (E.L.) řeší také

$$\underbrace{-y' f_z(y,y') + f(y,y')}_{Y} = K, \text{ kde } K \in \mathbb{R} \text{ je vhodná konstanta}$$

dk.

$Y \equiv K \Leftrightarrow Y' = 0$ v (a,b)

$$Y' = \frac{d}{dx}\left[-y'(x) f_z(y(x),y'(x)) + f(y(x),y'(x))\right] =$$

$$= \cancel{-y'' f_z(y(x),y'(x))} - y'\frac{d}{dx}\left[f_z(y(x),y'(x))\right] + \cancel{f_z(y(x),y'(x))y''(x)} + f_y(y(x),y'(x))y'(x)$$

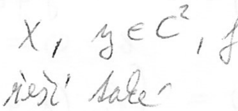
$$= y'\Big[\underbrace{-\frac{d}{dx}\left(f_z(y,y')\right) + f_y(y,y')}_{(E.L.)}\Big]$$

Příklad [minimální rotační plocha]

$$\min \Phi(y) = \int_0^1 2\pi|y|\sqrt{1+(y')^2}\, dx \ ^*$$

$$M = \{{}^0C^1([a,b]);\ y(0) = y(1) = A\}$$

$$f = y\sqrt{1+z^2}$$



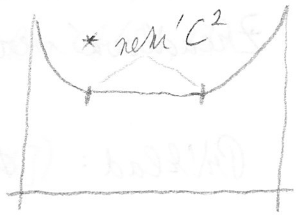
$*$ BÚNO: v integrálu nehraje roli 2π a abs(y), stačí y

$$f_z = \frac{yz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$-y' \frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} + y\frac{1+(y')^2}{\sqrt{1+y^2}} = K$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = K$$

$$\left(\frac{y}{K}\right)^2 = 1+(y')^2 \,; \quad (y')^2 = \left(\frac{y}{K}\right)^2 - 1$$



$y' = 0$: $y = \text{konst}$

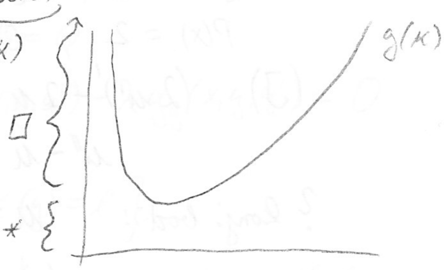
$$\left.\begin{array}{ll} y' > 0 : & y' = \sqrt{\left(\frac{y}{K}\right)^2 - 1} \\ y' < 0 : & y' = -\sqrt{\left(\frac{y}{K}\right)^2 - 1} \end{array}\right\} y = K\cosh\left(\frac{x-c}{K}\right)$$

nutně $y(x) = K\cosh\left(\frac{x-c}{K}\right)$ $x \in (0,1)$ // tj. na celém intervalu,

tj. $c = \frac{1}{2}$ // napojovat $y = \text{konst.}$ nelze

$$\Rightarrow y(x) = K\cosh\left(\frac{2x-1}{2K}\right)$$

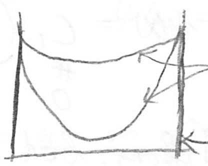
okrajové podmínky: $y(0) = y(1) = \underbrace{K\cosh\left(\frac{1}{2K}\right)}_{g(K)} = A$



$*$: pro malé A nelze K nalézt

□ : pro dostatečně velké A

lze nalézt 1 nebo 2 podezřelé body



$\Rightarrow$ problém není zcela dobře formulován

Def.: Nechť $y \in M$ je extremála úlohy (U) (tj. řešení (E.L.) rce)

Označme $P(x) = f_{zz}(x, y(x), y'(x))$

$$Q(x) = f_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \left[f_{yz}(x, y(x), y'(x))\right]'$$

Rovnice

$$\text{(J)} \quad [P(x)u']' - Q(x)u = 0 \qquad \text{pro neznámou fci } u = u(x)$$

se nazývá Jacobiho rovnice, příslušná dané extremále

Bod $\tilde{x} \in (a,b]$ se nazve konjugovaný bod rovnice (J), pokud existuje netriviální řešení $u(x)$, splňující

$$u(a) = u(\tilde{x}) = 0$$

Věta 16.5. [Jacobi]

Nechť $y \in C^2([a,b])$ je extremála (U).

Nechť (J) je příslušná Jacobiho rovnice

Nechť $P(x) > 0$ v $[a,b]$, $f \in C^3$

Potom

1. y lok. min. $\Rightarrow$ (J) nemá v $(a,b]$ konjugovaný bod
2. (J) nemá v $(a,b]$ konjugovaný bod $\Rightarrow$ y je ostré lok. minimum

Zrcadlová verze: $P(x) < 0$; maximum místo minimum

Příklad: $\Phi(y) = \int_0^\pi (y'+y)^2 + 2y\sin x \, dx$

$M = \{ y(0) = 0, y(\pi) = 1 \} \cap C^1([0,\pi])$

z dříve: extremála $y(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}\sin x$

$f = (z+y)^2 + 2y\sin x \in C^3$, $y \in C^2$

$f_{zz} = 2$; $f_{yy} = 2$; $f_{yz} = 2$

$P(x) = 2$; $Q(x) = 2 - (2)' = 2$

(J) $(2u')' - 2u = 0$

$u'' - u = 0$

? konj. bod: $u = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

$u(0) = 0$: $c_1 = -c_2$ -- $u(x) = \underset{\neq 0}{c_1} \underbrace{(e^x - e^{-x})}_{>0 \; \forall x > 0}$

$\Rightarrow \nexists$ konj. bod

$\Rightarrow$ extremála: ostré lokální minimum

Opakování [vázané extrémy]:

$F(x): R^m \to R$

$M = \{ x \in R^n ; G(x) = C \}$

Lagrangeovy multiplikátory: $\left. \begin{array}{l} x_0 \text{ ... extrém } F(x) \text{ vůči } M \\ F, G \in C^1(U(x_0)) \text{ a } \nabla G(x_0) \neq \underset{\sim}{0} \end{array} \right\} *$

$* \Rightarrow \exists \lambda \in R$, že $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$

Variační úloha s vazbou:

(V) $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx$

$M = \{ y \in C_0^1([a,b]),\ \Psi(y) = c \}$

$\Psi(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx$

Věta 16.6. Nechť $y \in M$ je lokální extrém úlohy (V).
Nechť $y \in C^2$, $f, g \in C^2$ a navíc $D\Psi(y,h) \neq 0$ aspoň pro jedno $h \in C_0^1([a,b])$

Potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

(L) $D\Phi(y,h) - \lambda D\Psi(y,h) = 0$ pro $\forall h \in C_0^1([a,b])$

Aplikace: V 16.2.: $D\Psi(y,h) = \int_a^b g_z(x,y,y')h' + g_y(x,y,y')h\,dx$

(L) : $D\chi(y,h) = 0\ \forall h$

$\chi(y) = \Phi(y) - \lambda\Psi(y) = \int_a^b \ell(x,y,y')\,dx;\ \ell = f - \lambda g$

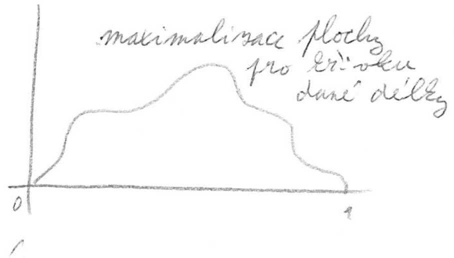
(L) $\Rightarrow$ y řeší (E.L.) rci pro χ, tj.

$$-(\ell_z(x,y,y'))' + \ell_y(x,y,y') = 0$$

$$-(f_z(x,y,y') - \lambda g_z(x,y,y'))' + f_y(x,y,y') - \lambda g_y(x,y,y') = 0$$

Příklad: $\Phi(y) = \int_0^1 y\,dx$; $M = \{ C_0^1([0,1])\ ;\ \Psi(y) = \ell \}$

$\Psi(y) = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$



$f = y$; $f_y = 1$, $f_z = 0$

$g = \sqrt{1+z^2}$, $g_y = 0$, $g_z = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$

$f, g \in C^3$, nechť $y \in C^2$ je lok extrém

$D\Psi(y,h) = \int_0^1 \frac{y'h'}{\sqrt{1+(y')^2}}\,dx$

$D\Psi(0,h) = 0\ \forall h$ --- $y \equiv 0$ podezřelý bod

$y \not\equiv 0$ -- volme $h = y$:

$D\Psi(y,y) = \int_0^1 \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}\,dx > 0$

(L) $\Leftrightarrow$ (E.L.) pro $\int_0^1 y - \lambda\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$\ell = \ell(y,z) = y - \lambda\sqrt{1+z^2}$

$\ell_y = 1$, $\ell_z = \frac{-\lambda z}{\sqrt{1+z^2}}$

(E.L.) $\left(+\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)' + 1 = 0$

L.16.3.: navíc platí $-y'\ell_z(y,y') + \ell(y,y') = K$

$$-y'\left(\frac{-\lambda y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) + y - \lambda\sqrt{1+(y')^2} = K$$

$\dots \quad y - \frac{\lambda}{\sqrt{1+(y')^2}} = K$, dosazením do (E.L.):

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1+(y')^2}} = y - K$$

pak $(y'(y-K))' + 1 = 0$

$$y'(y-K) + x - c = 0$$

$$\frac{(y-K)^2}{2} + \frac{(x-c)^2}{2} = d$$ tj. kružnice