15. Stejnoměrná konvergence

Def. Řekneme, že funkce $f_n(x): I \to \mathbb{C}$ konvergují bodově k funkci $f(x)$, jestliže pro $\forall x \in I$ pevné platí:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Značíme $f_n(x) \to f(x)$ v I

Příkl. ① $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(\underbrace{n \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \cdot \frac{x}{n}}\right)$, kde $\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \to 1$

$\to e^x$ v $\mathbb{R}$

② $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n|x|} = \begin{cases} (x=0) = \dfrac{n\cdot 0}{1+n\cdot 0} = 0 \to 1 \\ (x\neq 0) = \dfrac{x}{\frac{1}{n}+|x|} \to \dfrac{x}{|x|} \end{cases} \Big\}\ \operatorname{sgn}(x)$

③ $f_n(x) = n^2 x e^{-nx} = \begin{cases} (x=0) = 0 \\ (x>0) = \underbrace{n^2}_{\to\infty} x \underbrace{e^{-nx}}_{\substack{\to 0 \\ \text{(je silnější)}}} \end{cases} \Big\} \to 0$

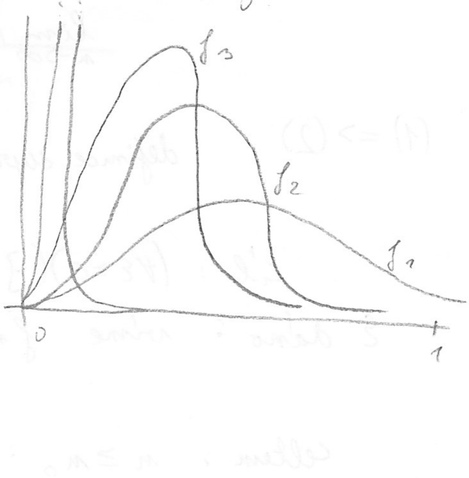
$x \geq 0$

Pozn. nevýhody bodové konvergence

- f_n spojité; $f_n \to f \not\Rightarrow f$ spojitá (Př. ②)
- Př. ③ $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n^2 x e^{-nx}\,dx = \left| \begin{array}{l} nx = y \\ n\,dx = dy \\ y \in (0,n) \end{array} \right| = \int_0^n y e^{-y}\,dy =$

$\overset{\text{per partes}}{=} \left[-ye^{-y}\right]_0^n - \int_0^n -e^{-y}\,dy = -ne^{-n} - e^{-n} + 1 \to 1$ ($n \to \infty$)

$$f_n(x) \to 0 \text{ v } [0,1], \text{ avšak } \int_0^1 f_n(x)\,dx \to 1$$

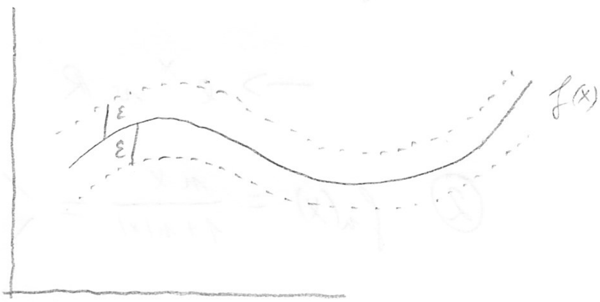


Def. Řekneme, že funkce $f_n(x) : I \to \mathbb{C}$ konvergují v intervalu I stejnoměrně k funkci $f(x)$, jestliže
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0)\left[\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,\right]$$
Značíme $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I

Pozn.: bodová konvergence: $\forall x \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

v podobě kvantifikátorů:
$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\left[\,|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,\right]$$

Názorný význam: $f_n \rightrightarrows f$



• pro libovolné $\varepsilon > 0$ grafy $f_n(x)$ jsou v ε-pásu okolo grafu f

bodově: n_0 závisí na x

stejnoměrně: n_0 nezávisí na x

Lemma 15.1. [Charakterisace stejnm. konv.]

Nechť $f_n(x), f(x) : I \to \mathbb{C}$. PNJE:

(1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I

$\Updownarrow$

(2) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$; kde $\sigma_n := \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$

$\Updownarrow$

(3) pro libovolnou posloupnost $\{x_n\} \subset I$ platí:
$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$$

dk. $(1) \Rightarrow (2)$

definice suprema .. σ_n ··· nejmenší číslo, splňující $|f_n(x) - f(x)| \leq \sigma_n \quad \forall x \in I$

cíl: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\left[\,|\sigma_n| < \varepsilon\,\right]$

ε dáno: víme $f_n \rightrightarrows f$ v I, tj. $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$x \in I$

celkem: $n \geq n_0$: $0 \leq \sigma_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad \sigma_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ← horní odhad

$|\sigma_n| < \varepsilon$

(2) => (1) nechť $\sigma_n \to 0$

tj. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)\left[|\sigma_n| < \varepsilon\right]$ ← horní odhad

$\forall x \in I \; |f_n(x) - f(x)| \leq \sigma_n < \varepsilon$ ... definice $f_n \rightrightarrows f$ v I

(2) => (3) $\{x_n\} \subset I$ libovolná

$$0 \leq \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\downarrow \; 0 \text{ podle věty o 2 policajtech}} \leq \underbrace{\sigma_n}_{\downarrow \; 0 \text{ (víme)}} \left(:= \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|\right)$$

(3) => (2) víme: $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$; $n \to \infty$, kde $\{x_n\} \subset I$ libovolná

cíl: $\sigma_n \to 0$

$\forall n$ pevné: $\sigma_n - \frac{1}{n} < \sigma_n$

2. vlastnost suprema: $\exists x_n \in I \ldots |f_n(x_n) - f(x_n)| > \sigma_n - \frac{1}{n}$

$$0 \leq \sigma_n \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \underbrace{|f_n(x_n) - f(x_n)|}_{\to 0}$$

$\downarrow$

0 (2 policajti)

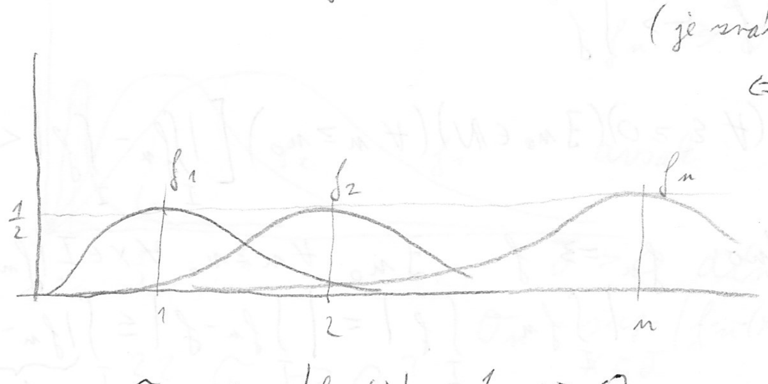
Příklad použití (3) (vhodné k vyvrácení $\rightrightarrows$)

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2} \longrightarrow 0 \text{ v } R$$

?? $f_n \rightrightarrows 0$ ... NE, volme $x_n = n$

(je známo, že $\left|\frac{ab}{a^2+b^2}\right| \leq \frac{1}{2}$, rovnost $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \pm b$)



$$\sigma_n = \sup_{x \in R} |f_n(x)| = \frac{1}{2} \not\to 0$$

Věta 15.1. Nechť $f_n(x) \in C(I)$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ v I
Potom $f \in C(I)$

dk.: ~~cíl:~~ cíl:

NE

Heineho věta:

$f \in C(I) \iff \forall$ posloupnost $\{x_n\} \subset I$, splňující $x_n \to x_0 \in I$, platí $f(x_n) \to f(x_0)$

Nechť $\{x_n\} \subset I$, $x_n \to x_0 \in I$

$$f(x_n) - f(x_0) = \underbrace{f(x_n) - f_n(x_n)}_{\xrightarrow{\text{lemma 15.1}}} + f_n(x_n) - f_n(x_0) + \underbrace{f_n(x_0) - f(x_0)}_{\to 0}$$

cíl: $\forall \varepsilon > 0 \; \forall x_0 \in I \; \exists \delta > 0 \left[x \in U(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right.$

$\varepsilon > 0$, $x_0 \in I$ dáno:

$f_n \rightrightarrows f \ldots \exists n_0 \in \mathbb{N} \ldots |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall x \in I$ (+)

f_{n_0} spoj. $\ldots \exists \delta > 0 \ldots \forall x \in U(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (++)

nechť $x \in U(x_0, \delta) \cap I$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|$$
$$\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}x|}_{< \frac{\varepsilon}{3} (+)} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} (++)} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} (+)}$$

Věta 15.2. Nechť $f_n, f \in C(I)$; $f_n \underset{I}{\rightrightarrows} f$, nechť $I = [a, b]$ je omezený (podstatné) a uzavřený interval. Potom

$$\int_I f_n \to \int_I f$$

dk.: cíl $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\left[\left| \int_I f_n - \int_I f \right| < \varepsilon \right]$

$\varepsilon > 0$ dáno $f_n \rightrightarrows f \ldots \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in I \; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

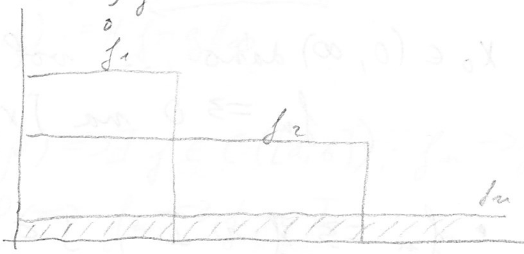
$n \geq n_0 \ldots \left| \int_I f_n - \int_I f \right| = \left| \int_I f_n - f \right| \leq \int_I \underbrace{|f_n - f|}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a)$ délka intervalu

Pozn.: určitý integrál – Riemann, Newton, Lesbegue

Pozn. omezenost podstatná

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{n} ; & x \in [0, n) \\ 0 ; & x \in [n, \infty) \end{cases}$$

$f_n \rightrightarrows 0$ v $[0,\infty)$, ale $\int_0^\infty f_n = 1 \ \forall n$



Def. Řekneme, že $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$ lokálně stejnoměrně v I, jestliže $(\forall x_0 \in I)(\exists \delta > 0)[f_n \rightrightarrows f \text{ v } I \cap U(x_0, \delta)]$

Značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ v I

Příkl. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$; $x \in [0,\infty)$

$f_n(x) \geq 0$, $f_n(x) \to 0$, $n \to \infty$ $\forall x \geq 0$ pevné
(bodová limita)

?? $f_n \rightrightarrows 0$ v $[0,\infty)$?

L. 15.1. $\Leftrightarrow \sigma_n \to 0$, $\sigma_n = \sup\limits_{x \geq 0} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\geq 0} f_n(x)$

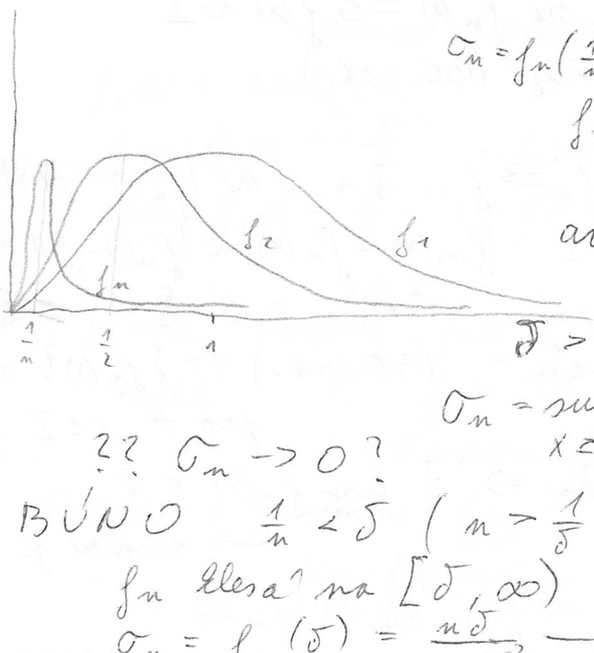
vyšetřuji supremum pro pevné n:

$f_n'(x) = \frac{n}{(1+n^2x^2)^2}(1-(nx)^2)$, $f_n' > 0$ $x \in (0, \frac{1}{n})$ - f_n roste v $[0, \frac{1}{n}]$

$f_n' < 0$ $x > \frac{1}{n}$ ... f_n klesá v $[\frac{1}{n}, \infty)$

$\sigma_n = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \not\to 0$

$f_n \not\rightrightarrows 0$ v $[0,\infty)$



avšak: $f_n \rightrightarrows 0$ v $[\delta,\infty)$
pro $\delta > 0$ pevné, libovolné

$\delta > 0$ dáno

$\sigma_n = \sup\limits_{x\geq\delta} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\geq\delta} f_n(x)$

?? $\sigma_n \to 0$?

BÚNO $\frac{1}{n} < \delta$ $(n > \frac{1}{\delta})$

f_n klesá na $[\delta, \infty)$

$\sigma_n = f_n(\delta) = \frac{n\delta}{1+n^2\delta^2} \longrightarrow 0$

navíc $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ v $(0,\infty)$

$f_n \to 0$ v $(0,\infty)$:

$x_0 \in (0,\infty)$ dáno ... vol $\delta > 0$, $x_0 - \delta > 0$

$f_n \rightrightarrows 0$ na $[x_0-\delta, \infty)$ viz. výsl.

Pozn. • $f_n \rightrightarrows f$ v I ; $J \subset I$ $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ v J

• $f_n \rightrightarrows f$ $\Rightarrow$ $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ $\Rightarrow$ $f_n \to f$ v I (nelze obrátit)

Věta 15.1.' $f_n \in C(I)$; $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ v I $\Rightarrow$ $f \in C(I)$

Pozn. : posloupnost $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ konverguje (má limitu $\in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow$ (B.C.) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m,n \geq n_0)\big[|a_m - a_n| < \varepsilon\big]$

Def. : Řekneme, že $f_n(x)$ splňují v I Bolzano-Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence, pokud

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall m,n \geq n_0)\big[|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big]$ (B.C.-st.)

Věta 15.3. Nechť $f_n(x)$ jsou definovány v I. Pak je ekvivalentní:

(1) $\exists f(x)$ tak, že $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I

$\Updownarrow$

(2) $f_n(x)$ splňují (B.C.-st.)

dk. (1)$\Rightarrow$(2)

$\varepsilon > 0$ dáno ... $f_n \rightrightarrows f$ ... $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in I$

$\forall m,n \geq n_0$, $\forall x \in I$: $|f_m(x) \underset{\pm f(x)}{-} f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

(2)$\Rightarrow$(1) : pozorování : (B.C.-st.) $\Rightarrow$ $\{f_n(x)\}$ splní (B.C.) pro $\forall$ $x \in I$ pevné

z toho $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ značme ji $f(x)$

tj. víme $f_n(x) \to f(x)$, ale ?? $f_n \rightrightarrows$?

$\varepsilon > 0$ dáno : (B.C.-st.) $\Rightarrow \exists n_0 \; \forall m,n \geq n_0$; $\forall x \in I$ $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\Big/ m \to \infty$

$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

tedy $f_n \rightrightarrows f$ v I

Důsledek $C(\overbrace{[a,b]}^{I})$ je Banachův prostor (s normou $\|f\|_\infty := \sup_{x\in I}|f(x)|$

$\{f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}\ ;\ f(x)$ je spojitá$\}$

B. pr. = lineární (vektorový) prostor, který je úplný vzhledem k metrice $\rho(f,g) := \|f-g\|_\infty$

tj. chci ukázat

$\{f_n\}$ splň. (BC. $-\rho$) $\Rightarrow \exists f \in C([a,b]) : f_n \to f$ vůči ρ

Pozorování: • $\underbrace{f_n \to f \text{ v metrice } \rho}_{\rho(f_n,f)\to 0} \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$ v I

$\|f-f_n\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)-f_n(x)| =: \sigma_n \to 0 \overset{v\ L\ 15.1.}{\Leftrightarrow} f_n \rightrightarrows f$ v I

• $\{f_n\}$ je cauchyovská vůči ρ

$\underbrace{(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall m,n\geq n_0)}[\rho(f_n,f_m) < \varepsilon]$

$\rho(f_n,f_m) = \sup_{x\in I}|f_n(x)-f_m(x)|$

$\Rightarrow \forall x\in I\ |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon$ $\to$ (BC. -1) pro $f_n(x)$

V. 15.3. ... $\exists f(x) : f_n \rightrightarrows f$ v I

f_n spoj. ... V. 15.1. ... f spojitá

$\Rightarrow f_n \to f$ vůči ρ (Pozorování), $f \in C([a,b])$

Poznámka: $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to\infty} f_n(x)) \neq \lim_{x\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))$

OBECNĚ NEPLATÍ =

$f_n(x) = \operatorname{arctg}(n-x)$

$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = -\frac{\pi}{2}$ ... $LS = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}$ ... $PS = +\frac{\pi}{2}$

Věta 15.4. [Moore – Osgood] $f_n(x) : \mathcal{P}(x_0,\delta) \to \mathbb{R}$

Nechť 1. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $\mathcal{P}(x_0,\delta)$

2. $\forall n$ pevné $\exists$ konečná $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ (značíme C_n)

Potom 1. $\exists$ konečná $\lim_{n\to\infty} C_n$ (značíme C)

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = C$

Poznámka: závěr 2.: $\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0} f_n(x))$

dk. 1. $\{C_n\}$ splní (B.C.) $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall m,n\geq n_0)\big[|C_m-C_n|<\varepsilon\big]$

$\varepsilon>0$ dáno

$$f_n \rightrightarrows f \;\ldots\; \{f_n\} \text{ splní (B.C.-st.)}$$

tj. $\exists n_0\ \forall x\in P(x_0,\delta)\ \forall m,n\geq n_0:\ |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$x\to x_0$: $\qquad |C_n - C_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} C_n =: C$$

2. $(\forall\varepsilon>0)(\exists\eta>0)\big[x\in P(x_0,\eta) \Rightarrow |f(x)-C|<\varepsilon\big]$

$$|f(x)-C| \leq |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-C_n| + |C_n-C| = P_1+P_2+P_3$$

$\varepsilon>0$ dáno:

- vol $n\in\mathbb{N}$ tak, že $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall x\in P(x_0,\delta)$ $\ldots f_n\rightrightarrows f$
- $|C_n-C|<\frac{\varepsilon}{3}$ $\ldots C_n\to C$

$\Rightarrow P_1, P_3 < \frac{\varepsilon}{3}$ pro $\forall x\in P(x_0,\delta)$

… pro toto n platí: $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = C_n$

$\exists\eta>0\ (\eta<\delta):\ |f_n(x)-C_n|<\frac{\varepsilon}{3}\ \forall x\in P(x_0,\eta)$

$$\Rightarrow |f(x)-C| < 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall x\in P(x_0,\eta)$$

Pozn.:
- platí jednostranná verse $(x\to x_0+,\ P_+(x_0,\delta))$
- lze mít $x_0=\pm\infty$
- $f_n(x)\to f(x) \not\Rightarrow f_n'(x)\to f'(x)$

  ani $f_n(x)\rightrightarrows f(x) \not\Rightarrow$

  např. $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin nx \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}$

  $\quad \sigma_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = \frac{1}{n}\to 0$

  !ale! $f_n'(x) = \cos nx \not\to 0$

  osciluje mezi $[-1,1]$

Věta 15.5 [Derivace člen po členu]

Nechť $f_n(x)$ jsou diferencovatelné v otevřeném intervalu I.

Nechť existují $f(x), g(x)$ tak, že $f_n(x)\to f(x)$; $f_n'(x)\overset{loc}{\rightrightarrows} g(x)$ v I

Potom $f(x)$ je diferencovatelná a platí:

$$f'(x) = g(x) \text{ v } I$$

jinak řečeno: $\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$

dk. $x_0 \in I$ pevné ... dokázi: $\exists f'(x_0) = g(x_0)$

vím: $f_n'(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} g(x) \Leftrightarrow \exists \delta > 0$, že $f_n'(x) \rightrightarrows g$ v $U(x_0, \delta)$

pomocné fce:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(x) &:= \frac{1}{x-x_0}\left(f_n(x) - f_n(x_0)\right) \\ \varphi(x) &:= \frac{1}{x-x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) \end{aligned}\right\} x \in P(x_0, \delta)$$

pozoruji:

$\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ v $P(x_0, \delta)$

$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = f'(x)$ → ještě nevím, zda existuje

Moore – Osgood: 1. $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ v $P(x_0, \delta)$ // potřebuji ukázat

2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n(x)$ $\forall n$ pevné // —"—

ale vím $= f_n'(x) \ (= c_n)$

ad 1: ? $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$?

(B.C.-st.): $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in P(x_0, \delta))(\forall m, n \geq n_0)\left[|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon\right]$

[illegible] $\varphi_m(x) - \varphi_n(x) = \frac{1}{x - x_0}\Big[\underbrace{\big(f_m(x) - f_n(x)\big)}_{} - \underbrace{\big(f_m(x_0) - f_n(x_0)\big)}_{}\Big]$

$= \frac{1}{x-x_0}\left[\psi_{mn}(x) - \psi_{mn}(x_0)\right]$

Lagrange: $= \psi_{mn}'(\tilde{x}) = f_m'(\tilde{x}) - f_n'(\tilde{x})$

a $\tilde{x} \in (x_0, x) \Rightarrow \tilde{x} \in P(x_0, \delta)$

(*) celkem $\forall x \in P(x_0, \delta) \Rightarrow \exists \tilde{x} \in P(x_0, \delta)$ tak, že

$|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| = |f_m'(\tilde{x}) - f_n'(\tilde{x})|$

úvaha je násl.

$f_n' \rightrightarrows g$ v $P(x_0, \delta) \Rightarrow \{f_n'\}$ splňuje (B.C.-st.)

(*) $\Rightarrow \{\varphi_n\}$ splňuje (B.C.-st.)

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \exists \tilde{\varphi}, \text{ že } \varphi_n \rightrightarrows \tilde{\varphi} \\ &\text{ale my víme } \varphi_n \to \varphi, \text{ tj. nutně } \tilde{\varphi} = \varphi \end{aligned}\right\} \varphi_n \rightrightarrows \varphi$$

aplikace V. 15.4. $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ v $P(x_0, \delta)$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \varphi_n = f_n'(x_0)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x_0)$ a hlavně $\exists \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}_{f'(x_0)} = g(x_0)$

(víme $= g(x_0)$)

Věta 15.5.' [Integrování člen po členu]

Nechť $u_n \overset{loc}{\rightrightarrows} u$ v I

Nechť $U_n = \int u_n$ v I

Nechť $U_n(x) \to U(x)$ v I

Potom $\int u = U$ v I

dk.

$$\underset{v\ I}{\int f = F} \iff \underset{\forall x \in I}{F' = f} \text{ a užiji V.15.5.}$$

opakování: (řady) $a_k \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje $\iff \exists \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{C}$, kde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\iff$ (B.C.-ř.) : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m \geq n_0)(\forall p \geq 1) \left|\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k\right| < \varepsilon$

Def.: Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje (lokálně) stejnoměrně v I, jestliže $\exists\, s(x)$ tak, že $s_n \overset{(sloc)}{\rightrightarrows} s$ v I, kde $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

Věta 15.6. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I

Potom $f_n \rightrightarrows 0$ v I

dk.: $s_n \rightrightarrows s$ v I

cíl: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0)\left[|f_n(x)| < \varepsilon\right]$

$$|f_n(x)| = |s_n(x) \underset{\pm s(x)}{-} s_{n-1}(x)| \leq \underbrace{|s_n(x) - s(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|s(x) - s_{n-1}(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

$\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in I$:

~~XXX~~ Definice: Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ splňuje v I (B.C.-st.ř.), jestliže

(B.C.-st-ř) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in I)(\forall m \geq n_0)(\forall p \geq 1)\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$

Věta 15.7. Nechť $f_k(x): I \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Pak je ekvivalentní

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \rightrightarrows$ v I

$\Updownarrow$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ splní (B.C.-st.-ř.) v I

dk. $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

(1) $\iff \exists s(x);\ s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v I

podle V. 15.3. $\iff \{s_n(x)\}$ splní (B.C.-st.)

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in I)(\forall m, n \geq n_0)\left[\underbrace{|s_m(x) - s_n(x)|}_{\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)} < \varepsilon\right]$

BÚNO: $m = n+p$
$p \geq 0$

$\iff$ (B.C.-st.-ř.) pro $\sum f_k(x)$

Def.: Řekneme, že $\sum f_k(x)$ konverguje (lokálně) absolutně stejnoměrně v I, jestliže $\sum |f_k(x)|$ konverguje (lokálně) stejnoměrně v I.

Věta 15.8. $\sum f_k(x)$ konv. abs. stejn. v $I \Rightarrow$ konv. stejn. v I

dk. cíl: $\sum f_k(x)$ konv. stejn. v $I \iff$ (B.C.-st.-ř.)

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0)(\forall p \geq 1)\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon \quad (*)$

víme: $\sum |f_k(x)|$ konv. stejn. v I: (B.C.-st.-ř.)

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0)(\forall p \geq 1)\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)|\right| < \varepsilon \quad (**)$

z ($\Delta \neq$) $\left|\sum f_k(x)\right| \leq \left|\sum |f_k(x)|\right|$

vyplývá $(**) \Rightarrow (*)$

Věta 15.9. [Weierstrass]

Nechť $f_k(x): I \to \mathbb{C}$

Nechť existují čísla a_k (nezávislá na x) taková, že

1. $|f_k(x)| \leq a_k \quad \forall x \in I, \forall k \geq 1$
2. $\sum a_k$ konverguje

Potom $\sum f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I

důkaz V15.9.:

Cíl: (B.C.-st.-ř.) pro $\sum |f_k(x)|$, tj. (**) z předchozí věty

$\varepsilon > 0$ dáno, víme: $\sum a_k$ konv. $\Rightarrow$ splň. (B.C.-ř.)

$$\exists n_0 \, \forall n \ge n_0 \, \forall p \ge 1 \; \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$$ // $a_k \ge 0$ z předpokladu $\Rightarrow |\Sigma|$ nemusí být abs. hodnota

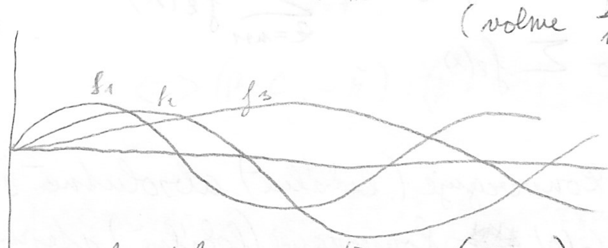
$\Rightarrow \forall n \ge n_0 \, \forall x \in I \, \forall p \ge 1$
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$
↳ dle 1.

Příkl. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{k^2}\right)$: ? konv. stejn. v $\mathbb{R}$?

NE, $f_n \not\rightrightarrows$ v $\mathbb{R}$ (V.15.6.)

$\sigma_n := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\sin \frac{x}{n^2}\right) = 1$

(volme $\frac{x}{n^2} = \frac{\pi}{2} + 2N\pi$; $x = n^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$



analogicky $f_n \not\rightrightarrows$ na (K, ∞) ani $(-\infty, -K)$

?? konv. abs. stejn. na $[-K, K]$? $K > 0$ pevné

$$|f_k(x)| = \left|\sin\left(\frac{x}{k^2}\right)\right| \le \left|\frac{x}{k^2}\right| \le \frac{K}{k^2} \quad \forall x \in [-K, K]$$

// $|\sin y| \le$ 1, $|y|$

$\sum a_k$ konv. — Weierstrass: ANO

tvrdím: $\sum f_k(x) \overset{loc}{\rightrightarrows}$ absolutně v $\mathbb{R}$

tj. $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0$ tak, že $\sum f_k(x) \rightrightarrows$ absolutně v $U(x_0, \delta)$

$x_0 \in \mathbb{R}$ dáno, vol $\delta = 1$ (třeba); $K > 0$ ... $U(x_0, \delta) \subset [-K, K]$

tady tak — zde konverguje absolutně stejn., tak

Věta 15.10. [Leibniz - stejn. verse]

Nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I; nechť pro $\forall x \in I$ pevné je $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ monotónní. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(x)$ konv. stejn. v I

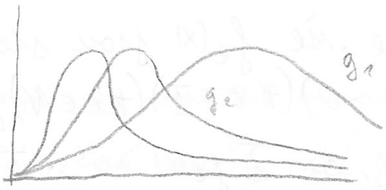
dk.: později (důsledek Dirichleta)

Poznámka: monotonie $\{g_k(x)\}_k$ stačí pro $k \ge n_0$, ale stejnoměrně

tj. $\exists n_0 \, \forall x \in I \; \{g_k(x)\}_{k=n_0}^{\infty}$ je monotónní

NESTAČÍ: $\forall x \in I \; \exists n_0$ ... stejný závěr, to by n_0 záviselo na x

Příkl. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \underbrace{\frac{kx}{1+k^2x^2}}_{g_k(x)}$



$\overset{?}{\rightrightarrows}$ v $[0,\infty)$: NE, ani v $(0,\infty)$, neboť $g_k(x) \not\rightrightarrows 0$

$$\sigma_n := \sup_{x\in(0,\infty)} \left|(-1)^n \frac{nx}{1+n^2x^2}\right| \geq \frac{1}{2} \not\to 0$$

$x = \frac{1}{2}$

$\overset{?}{\rightrightarrows}$ na $[\eta,\infty)$: ANO

Leibniz: $g_k(x) \rightrightarrows 0$ na $[\eta,\infty)$ viz dříve

? monotonie (vůči k, x pevné)

$$\frac{\partial}{\partial k}(g_k(x)) = \frac{\partial}{\partial k}\cdot\frac{kx}{1+k^2x^2} = \frac{x}{1+k^2x^2}\left(1-x^2k^2\right) < 0$$

$x\in[\eta,\infty)$ pevné … $1-x^2k^2 \le 1-\eta^2k^2 < 0$ pokud $k > \frac{1}{\eta}$

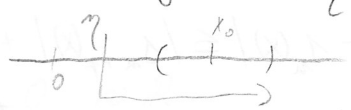
$x \ge \eta$

tvrdíme: $\sum f_k(x)$ konv. lokálně stejn. v $(0,\infty)$

$x_0\in(0,\infty)$ dáno: vol $\delta>0$ … $x_0-\delta>0$

vol $\eta>0$; $0<\eta<x_0-\delta$

konv. stejn. v $[\eta,\infty)$ a tedy v $U(x_0,\delta)$



Opakování: • Dirichlet (obec. verze)

$\left.\begin{array}{l}\sum a_k \text{ omez. část. součty} \\ b_k \to 0\ ;\ \{b_k\} \text{ monotónní} \\ \quad k\ge n_0\end{array}\right\}\ \sum a_k b_k$ konv.

• Abelovo sumační lemma (L. 10.3)

$a_k\in\mathbb{C}$, $b_k\ge 0$, $b_k \ge b_{k+1}$; $k\ge n_0$

nechť $\exists K>0$ … $\left|\sum_{k=n_0}^{n} a_k\right| \le K \quad \forall n\ge n_0$

potom $\left|\sum_{k=n_0}^{n} a_k b_k\right| \le b_{n_0}\cdot K \quad \forall n \ge n_0$

Def. Řekneme, že $f_k(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I, jestliže
$$(\exists K>0)(\forall x\in I)(\forall k\in\mathbb{N})\left[\,|f_k(x)|\le K\,\right]$$
Řekneme, že $\sum f_k(x)$ má v I stejnoměrně omezené část. součty, jestliže
$$(\exists K>0)(\forall x\in I)(\forall n\in\mathbb{N})\left[\,\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big|\le K\,\right]$$

Věta 15.11. [Dirichlet – stejn. verze]

Nechť $\sum_k f_k(x)$ má v I stejnoměrně omezené část. součty;
nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I, navíc
nechť $\exists n_0$ tak, že $\{g_k(x)\}_{k=n_0}^{\infty}$ je nerostoucí pro $\forall x\in I$ pevné

Pak $\sum f_k(x)\, g_k(x)$ konv. stejn. v I

Dk.

cíl: (B.C. – st. ř.)
$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0)(\forall x\in I)(\forall n\ge n_0)(\forall p\ge 1)\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\Big|<\varepsilon$$
$\varepsilon>0$ dáno ...

... $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ ... víme $\exists K>0$ ... $|s_n(x)|\le K$ $\forall x\in I, \forall n$

... $\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\Big| = |s_{n+p}(x) - s_n(x)| \le |s_{n+p}(x)| + |s_n(x)| \le 2K$
$\forall x\in I, \forall n, \forall p$

$g_k \rightrightarrows 0$ ... $\exists n_0$ $|g_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2K}$ $\forall k\ge n_0$ $\forall x\in I$

BÚNO: n_0 takové, že $g_k(x)\ge g_{k+1}(x)$ $\forall x\in I$, $\forall n\ge n_0$

Abelovo lemma ($a_k = f_k(x)$, $b_k = g_k(x)$)
$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\,g_k(x)\Big| \le g_{n+1}(x)\cdot 2K < \frac{\varepsilon}{2K}\cdot 2K = \varepsilon$$
$\forall x\in I, \forall n\ge n_0, \forall p\ge 1$

Důsl.: Věta 15.10. [Leibniz]

$f_k(x) = (-1)^k$ ... $\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big|\le 1$ stejnoměrně vůči x

Příkl. (DŮLEŽITÝ)

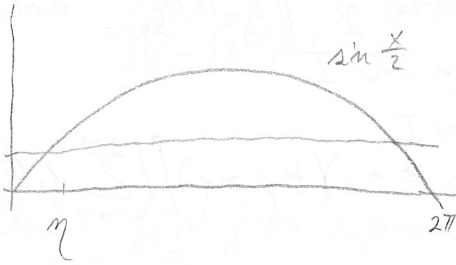
$\sum_k \sin kx$, $\sum_k \cos kx$ mají stejnoměrně omezené částečné součty v $[\eta, 2\pi-\eta]$ $\forall \eta>0$

L. 10.4.: (1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)\cos(\frac{n}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}$

$\forall x \neq 2k\pi$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \le \frac{1}{\sin\frac{\eta}{2}} \quad \forall n, \forall x \in (\eta, 2\pi-\eta)$$



Př. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\sin(kx)$ ($g_k(x)$, $f_k(x)$) je $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \le \frac{1}{|\sin\frac{\delta}{2}|}$

$\forall n, \forall x \in [\delta, 2\pi-\delta]$

$g_k(x) \rightrightarrows 0$ v R

$\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ je klesající $\forall x$ pevné

V 15.11.: řada konv. stejn. v $[\delta, 2\pi-\delta]$ pro $\forall \delta>0$ pevné a tedy $\Rightarrow$ konv. stejn. lokálně v $(0, 2\pi)$

tvrdím: nekonv. stejn. na $(0,\delta)$ $\delta>0$ pevné

ukážu, že neplatí B.C.:

$\neg$ (B.C. -st. ř.)

$$(\exists \varepsilon>0)(\forall n_0)(\exists x \in (0,\delta))(\exists n \ge n_0)(\exists p \ge 1)\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k}\right| > \varepsilon$$

$\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; n_0 dáno, volme: $n \ge n_0$; $\frac{\pi}{4n} \in (0,\delta)$

$x := \frac{\pi}{4n}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin(\frac{k\pi}{4n})}{k}$$

$$1 \le \frac{k}{n} \le 2 \quad \dots \quad \sin\Big(\underbrace{\frac{k\pi}{4n}}_{\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)}\Big) \ge \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

čili $$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4n}\right)}{k} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\, n \cdot \frac{1}{2n} = \varepsilon$$

Věta 15.12. [Abel - stejnoměrná verse]

Nechť $\sum f_k(x) \rightrightarrows$ v I

Nechť $g_k(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I

Nechť $\exists\, n_0$, že $\forall x \in I$ pevné je $\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ monotónní

Pak $\sum f_k(x) g_k(x)$ konv. stejn. v I

$\sum f_k(x) g_k(x) \rightrightarrows$ v I

Dk. cíl: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in I)(\forall n \ge n_0)(\forall p \ge 1)\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x)\right| < \varepsilon\right]$

$\varepsilon > 0$ dáno:

$\dots \exists M > 0 \dots |g_k(x)| \le M \ \forall x \in I \ \forall k$

$\forall x \in I$ pevné $\{g_k(x)\}$ monotónní, omezená $\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} g_k(x) =: g(x)$

BÚNO: nerostoucí

označ:

$$h_k(x) := g_k(x) - g(x) \qquad \Rightarrow h_k(x) \ge 0;\ h_k(x) \ge h_{k+1}(x)$$
$$|h_k(x)| \le |g_k(x)| + |g(x)| \le 2M$$

$\sum f_k(x) \rightrightarrows$: $\exists n_0\ \forall x \in I\ \forall n \ge n_0\ \forall p \ge 1 : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \underbrace{g_k(x)}_{h_k(x)+g(x)}\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) h_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\, g(x)\right| =: P_1 + P_2$$

$$\left.\begin{aligned} P_1 &\le (\text{abelovo lemma}) \le \frac{\varepsilon}{3M} \cdot \underbrace{|h_{n+1}(x)|}_{\le 2M} \le \frac{2\varepsilon}{3} \\ P_2 &= |g(x)| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \le M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}\right\} \le \varepsilon$$

TOTÉŽ PRO ŘADY:

Věta 15.13.

Nechť $f_k(x) \in C(I)$

Nechť $\sum f_k(x) \rightrightarrows$ v I, označme $s(x)$ její součet

Potom $s(x) \in C(I)$

Věta 15.14.

Nechť $f_k(x) \in C(I)$; $I = [a, b]$ je omezený, uzavřený

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \rightrightarrows$ v I

Pak

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx$$

Věta 15.15.

Nechť $f_k(x)$ jsou diferencovatelné v I (otevřený interval)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konv. pro $\forall x \in I$ pevné.

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \rightrightarrows$ v I.

Potom

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \quad v\ I$$

---

dk. (15.13 – 15) $\quad s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$; $s_n(x) \longrightarrow s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ pro $\forall x \in I$

V 15.13. $s_n(x) \in C(I)$ – součet konečně mnoha spojitých funkcí

navíc $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$

$$\Rightarrow s(x) \in C(I) \quad (V\ 15.1.)$$

V 15.14. $s_n(x) \rightrightarrows s(x) \ldots (V\ 15.2.)$: $\int_a^b s_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b s(x)\,dx$

$$\int_a^b s_n(x)\,dx = \int \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,dx \xlongequal{\text{linearita}} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k(x)\,dx \right) \longrightarrow \sigma$$

$$\text{dle def.: } \sigma = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

V 15.15. $s_n'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right)' \xlongequal{\text{linearita!}} \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \rightrightarrows g(x)$ (předpoklad)

$$(V\ 15.5.):\quad g(x) = \left(\lim_{n\to\infty} s_n(x) \right)' = s'(x)$$

Pozn. $f_n(x) : I \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $\quad I \subset \mathbb{R}$

obecněji $f_n(x) : M \to Y$ ... (X,ρ), (Y,σ) ... metrické prostory

$M \subset X$ $\Rightarrow$ tvrzení by zůstala v platnosti

např.

Def. $f_n \rightrightarrows f$ v M : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x \in M)(\forall n \geq n_0)\left[\sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\right]$

např.

V 15.1': $f_n \in C(M)$; $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f \in C(M)$

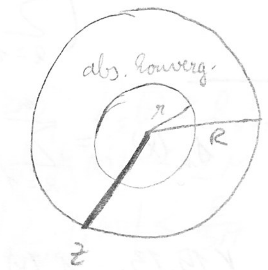
tedy platí analogie předchozích vět, pro řady: Y – vekt. prostor

B.C. : Y je úplný

Pozn. mocninné řady

$$(\text{MŘ}) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$R \in [0, \infty]$ ... poloměr konvergence



tvrzení 1 : $r < R \Rightarrow$ (MŘ) konv. abs. stejn. v $U(0,r)$

dk. $R = \sup\{\rho \geq 0;\ \{|a_k|\rho^k\}$ je omezená$\}$

$r < R$: $\exists \rho > r$; $|a_k|\rho^k \leq C \quad \forall k \geq 1$

$\exists C > 0$

když $x \in U(0,r)$: $|a_k x^k| = |a_k|\,|x^k| \leq |a_k|\, r^k = |a_k|\rho^k \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \leq$

$\leq C \cdot \Theta^k$, $\quad \Theta \in (0,1)$

pak $\sum C\Theta^k \to \Rightarrow$ (MŘ) $\overset{abs}{\rightrightarrows}$ Weierstrass

* tvrzení 2 : (Abelova věta)

Nechť (MŘ) $\to$ (i neabs.) pro $x = z \in \mathbb{C}$, kde $|z| = R$

Potom (MŘ) $\rightrightarrows$ na úsečce mezi 0 a z