15.
STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

AUTOR TEXTU: JAN ANDRLE
POSLEDNÍ ÚPRAVA DNE: 28. PROSINCE 2013

1 Úvod

Text vznikl přepisem poznámek k [1], nejedná se však jen o „kopii“ (se všemi klady i zápory). Přidány byly poznámky inspirované [2] a [3] - hl. Poznámka 7, Poznámka 20, Poznámka 24, Poznámka 26.

Vzhledem ke způsobu vzniku tohoto textu se v něm projevují jisté myšlenkové zkratky, které mohou být pro čtenáře nezvyklé. Avšak bylo dbáno, aby byl text srozumitelný. Uveďme alespoň dva typické příklady. V textu je použito „⇒“ ve smyslu „z toho plyne následující“ a dále symbol „→“, který nabývá významu až v kontextu, ale obecně bychom mohli říci, že lze „přeložit“ následovně: „když víme …, můžeme pokračovat takto …“.

Případné připomínky, nápady či hlášení chyb je možné směřovat na emailovou adresu: andrle.jan@centrum.cz.

2 OBSAH

3 ÚVODNÍ POZNÁMKY

Poznámka 1: Značení v tomto textu

Chápejme zápis $f(x), f_n(x)$ jako označení (posloupnosti) reálných resp. komplexních funkcí $f, f_1, f_2, \dots : I \mapsto \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$. Explicitně také nebudeme vypisovat $n \in \mathbb{N}$. Přičemž $I \subset \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ označuje neprázdný interval, není-li řečeno jinak. Dále pro výraz „$f(x)$ je spojitá v I“ budeme používat dříve zavedené značení $f(x) \in \mathcal{C}(I)$.

Poznámka 2: Motivační příklad

Exponenciála se v matematice definuje jako jistá mocninná řada. Pokud však opravdu s exponenciálou „takto pracujeme“, můžeme i v poměrně jednoduchém případě narazit na některé problémy. V následujícím příkladě se „zničehonic“ objeví dokonce tři operátory (integrál, suma a limita) a vyvstane otázka zda, a jestli vůbec, můžeme postupovat tak, jak jsme učinily. Konkrétně rovnost označená otazníkem je problematická z toho důvodu, jak ukážeme později, že obecně neplatí!

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \mathrm{d}x \overset{?}{=} \lim_{k\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left[\sum_{n=0}^{k} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = e^1 - 1$$

4 STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE POSLOUPNOSTI FUNKCÍ

V této sekci se budeme věnovat (pokud nás její název samozřejmě neplete) posloupnosti reálných resp. komplexních funkcí. Konkrétně nás bude zajímat jakým „způsobem“ se funkce chovají v limitních případech. Jenže my si budeme přát přeci jen o trochu více, neboť by vlastně stačilo dosadit do takové posloupnosti vybrané x pevné (funkce proměnné x) a zkoumat „klasickou“ číselnou posloupnost viz příslušná kapitola. Nyní však přijde ono „ale“.

U funkcí nás zajímá i monotonie právě vůči proměnné (nikoliv pouze samotné „číselné“ posloupnosti), dále s funkcemi „pracujeme“ (derivujeme, integrujeme, … je). I tomu se tedy budeme věnovat. A zjistíme, že naše konvergence bude vypadat trošičku komplikovaněji, avšak v prostoru funkcí nám umožní zmíněné operace provádět.

4.1 ÚVOD DO STEJNOMĚRNÉ KONVERGENCE

Definice 1: Bodová konvergence

Řekneme, že funkce $f_n(x): I \mapsto \mathbb{C}$ konvergují v I bodově k funkci $f(x)$, jestliže $\forall x \in I$ platí $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. Značíme: $f_n(x) \to f(x)$ v I.

Příklad 1: $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x; x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(\underbrace{1+\frac{x}{n}}_{\substack{>0 \text{ pro} \\ \text{n velké}}}\right)\right) = \exp\left(\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}}_{\to 1;\, n\to+\infty} x\right) \to e^x; n \to +\infty$$

Příklad 2: $f_n(x) = \frac{nx}{1+n|x|}$

$\underline{x=0}$: $f_n(x) = \frac{0}{1+0} = 0; \forall n$

$\underline{x \neq 0}$: $f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n}+|x|} \to \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x)\,; n \to +\infty$

tedy $\underline{\forall x} \Rightarrow f_n(x) \to \operatorname{sgn}(x)\,;\ n \to +\infty$

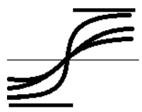
Příklad 3: $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}; x \in [0,+\infty)$

$\underline{x=0}$: $f_n(x) = n^2 \cdot 0 \cdot e^0 = 0;\ \forall n$

$\underline{x > 0}$: $f_n(x) = n^2 x e^{-nx} \to 0; n \to +\infty$, exponenciála silnější

tedy $\underline{\forall x} \Rightarrow f_n(x) \to 0;\ n \to +\infty$ v $[0,+\infty)$

Poznámka 3: Nevýhody bodové konvergence



obecně: $f_n(x)$ spojité a $f_n(x) \to f \not\Rightarrow f$ spojité, viz Příklad 2!
obecně: $f_n \to f$ v $[a,b] \not\Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$, viz Příklad 3 ($[a,b] = [0,1]$)

konkrétně: $\int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx = \left| \begin{matrix} y := nx \\ \frac{dy}{dx} = x \\ y \in [0,n] \end{matrix} \right| = \int_0^n y e^{-y} dy \xrightarrow{\text{per-partes}} 1$, tj. fixuji x, přestože však jde integrand k nule, plocha pod grafem funkce zůstává stejná („bakule" se jen posouvá – nakreslete si graf).

Poznámka 4: Důvody hledání lepší definice konvergence

1. Problémy z předchozí poznámky (Poznámka 3)
2. Některé jevy nelze (lehce) popsat nad množinou $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{R}^n$
3. Z předchozí analýzy zůstalo mnoho nedořešených problémů (integrály, derivace pouze specifických funkcí) → myšlenka aproximace těžší úlohy lehčími úlohami (spíše sekce 5. Stejnoměrná konvergence řad funkcí).

Definice 2: Stejnoměrná konvergence

Řekneme, že funkce $f_n(x): I \mapsto \mathbb{C}$ konvergují v I stejnoměrně k $f(x)$, jestliže:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall n \geq n_0)[|f_n(x) - f(x)| < \epsilon]$$

Poznámka 5: Bodová konvergence v podobě kvantifikátorů

Pro porovnání můžeme rozepsat výrok $(\forall x \in I)$ „platí limita“ (Definice 1):

$$(\forall x \in I)(\forall \epsilon \geq 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[|f_n(x) - f(x)| < \epsilon]$$

Tedy rozdíl je jen v pořadí kvantifikátorů – volby n_0 v závislosti na x.

V obou případech jsou funkce f_n od jistého n v ϵ-novém pásu/okolí funkce f, avšak rozdíl nastává ve volbě n_0– v případě stejnoměrné konvergence nezávisí na pozici resp. proměnné x, a tedy pro $n \geq n_0$ jsou f_n *celé* ve zmíněném ϵ-novém pásu.

Poznámka 6: Značení stejnoměrné/bodové konvergence

Již víme, že $f_n \to f$ symbolizuje „f_n konvergují bodově k f“. Obdobně budeme značit stejnoměrnou konvergenci $f_n \rightrightarrows f$. Budeme-li chtít označit jen obecnou charakterizaci (tj. „že konverguje“), můžeme použít $f_n \to$ resp $f_n \rightrightarrows$.

4.2 Vlastnosti stejnoměrně konvergujících funkcí

Poznámka 7: Přehled základních vlastností stejnoměrné/bodové konvergence

1. Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ v I, pak $f_n \to f$ v I.
2. Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ v $I_i, \forall i \in \mathbb{N}$; pak $f_n \rightrightarrows f$ v I, kde $I \coloneqq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$… konečné sjednocení!
3. Nechť I konečná množina, pak: $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow f_n \to f$ v I.
4. Jestliže $I' \subset I$ a $f_n \rightrightarrows f$ v $I \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ v I'.

Důkaz: BŮNO se zaměříme pouze na $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)$ resp. $(\forall x \in I)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$; ϵ pevné dáno:

1. Jestliže jsme nalezli n_0 tak, že pro $\forall x$ platí závěr, tím spíše nalezneme pro každé vybrané x pevné vlastní n_0.
2. Nalezli jsme $n_0^i \to \forall x \in I_i$, pak zjevně $n_0 \coloneqq \max\{n_0^1, \dots\} \to \forall x \in I$, nyní vidíme i důležitost konečnosti, neboť maximum nekonečné množiny by mohlo být nekonečné.
3. Jednu implikaci jsme již dokázali, viz bod 1. Druhou implikaci intuitivně nahlédneme z důkazu bodu 2, kde interval rozdělíme na intervaly zahrnující pouze dané x pevné. Na tomto intervalu již dokážeme nalézt příslušné n_0^i, neboť zde bodově konverguje.
4. Zjevné – přímo z definice resp. zúženi na interval I'.

∎

Věta 15. 1: O přenosu spojitosti stejnoměrně konvergujících funkcí

Nechť jsou dány $f_n(x) \in \mathcal{C}(I)$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ v I. Potom $f(x)$ je též spojitá v I.

DŮKAZ: vypíšeme definici spojitosti (cíl):

$$(\forall x_0 \in I)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in U(x_0, \delta) \cap I \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0), \epsilon)]$$

Fixuj $x_0 \in I, \epsilon > 0$; víme $f_n \rightrightarrows f \wedge f_n \in \mathcal{C}(I) \Rightarrow$ spec. f_{n_0} spojitá v I:

- $\exists n_0 \colon \forall n \geq n_0 \colon \forall x \in I \colon |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$
- $\exists \delta > 0 \colon x \in U(x_0, \delta) \cap I \colon \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{3}$
- $U(x_0, \delta) \cap I \subset I$: dále Poznámka 7 bod 4

Celkem: $x \in U(x_0, \delta) \cap I$ libovolné: $|f(x) - f(x_0)| =$

$$= \left|f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right| \underbrace{\leq}_{\text{troj.}} \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| +$$

$$+ \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| + \left|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right| \underbrace{< 3 \times \frac{\epsilon}{3} = \epsilon}_{\text{předch. úvahy a odhady}}$$

∎

Věta 15. 2: O konvergenci integrálu stejnoměrně konvergujících funkcí

Nechť jsou dány funkce $f_n(x) \in \mathcal{C}([a, b])$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ v $[a, b]$. Potom

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

DŮKAZ: $\epsilon > 0$ dáno, víme: $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \exists n_0 \colon \forall n \geq n_0 \colon \forall x \in [a, b] \colon |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$

Nyní již jen odhadneme integrál rozdílu $f_n(x) - f(x)$ – vypustíme proměnnou x:

$$\forall \epsilon > 0 \colon \exists n_0 \colon \forall n \geq n_0 \colon \left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b - a} \leq \epsilon$$

∎

Poznámka 8: O konečnosti intervalu v předchozí větě (Věta 15. 2)

Alternativně lze rozdíl odhadnout: $\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \left(\sup_{[a,b]} |f_n - f|\right)(b - a) \to 0$.

Tedy předpoklad omezeného intervalu je podstatný (jinak by nám hrozilo hledání suprema v nekonečné množině, které by mohlo být obecně nekonečné), ukažme si navíc i protipříklad:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}; x \in (0,n) \\ 0; x \in (0,n) \end{cases} \dots \int_0^{+\infty} f_n = 1 \nrightarrow 0 \dots \text{avšak } f_n \rightrightarrows 0 \text{ v } \mathbb{R}$$

Poznámka 9: Typ integrálu v předchozí větě (Věta 15. 2)

Rychlá odpověď - jakýkoliv / podrobná: $f_n \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow f \in \mathcal{C}([a,b])$ (Věta 15. 1)… Integrály $((\mathcal{N}); (\mathcal{R}); \dots)$ mají smysl a rovnají se, obdobně jejich vlastnosti (linearita, …).

Lemma 15. 1: Ekvivalentní podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

Nechť $f_n(x): I \mapsto \mathbb{R}$ a $f(x): I \mapsto \mathbb{R}$ jsou dány. Potom následující je ekvivalentní:

1. $f_n \rightrightarrows f$ v I
2. $\sigma_n \to 0, n \to +\infty$, kde $\sigma_n \coloneqq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$
3. pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ platí: $f_n(x_n) - f(x) \to 0, n \to +\infty$

DŮKAZ: Dokážeme dvě ekvivalence 1. (1.⇔ 2.) a 2. (2.⇔ 3.):

1. (1.⇔ 2.)

1.1. (1.⇒ 2.): tedy cíl: $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[|\sigma_n - 0| < \epsilon]$, kde σ_n dle definice

ϵ dáno, víme: $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in I: |f_n - f| < \frac{\epsilon}{2}$… horní odhad
$\frac{\epsilon}{2} > |\sigma_n| = |\sup_{x \in I} |f_n - f||$… plyne z předchozího — $0 \leq \sigma_n \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$

1.2. (1.⇐ 2.): víme $\sigma_n \to 0 \Rightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[|\sigma_n| < \epsilon] \Rightarrow 0 \leq \sigma_n < \epsilon$
$|f_n - f| \leq \sigma_n < \epsilon, \forall x \in I$ … 1.vl.suprema $\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ v I

2. (2.⇔ 3.)

2.1. (2.⇒ 3.): $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ dáno, libovolné, pozoruji (1. vl. suprema):
$0 \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sigma_n \to 0$ … věta o dvou strážnicích

2.2. (2.⇐ 3.): 2. vl. suprema: $\sigma_n - n^{-1} < \sigma_n \Rightarrow \exists x_n \in I: |f_n(x_n) - f(x_n)| > \sigma_n - n^{-1} \Leftrightarrow 0 \leq \sigma_n < |f_n(x_n) - f(x_n) + n^{-1} \to 0$ … opět strážnici

■

Poznámka 10: Metoda ověření $f_n \rightrightarrows f$

1. Ukážeme, že $f_n \to f$ v I (jediný kandidát! – promyslete si, z čeho tak lze usoudit?[1])
2. Spočteme (odhadneme shora!) $\sigma_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$
3. Ukážeme $\sigma_n \to 0 \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$

---

[1] Stačí si uvědomit (Poznámka 7 bod 1.), že platí: $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$ na daném intervalu.

Poznámka 11: Metody vyvrácení $f_n \rightrightarrows f$

1. Přímo — tj. pomocí definice
2. $\sigma_n \nrightarrow 0$
3. Nalezneme $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ posloupnost, že neplatí: $f_n(x_n) - f(x) \to 0, n \to +\infty$
4. Funkce splní další předpoklady předchozích vět (Věta 15. 1 a Věta 15. 2), ale nesplní příslušné závěry.

Příklad 4: $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ na $[-100, 100]$

Funkce bodově konvergují ke konstantní funkci $f(x) = 0$ (podrobněji!). Nyní odhadneme $\sigma_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ resp. vlastně jen $|f_n(x)| \leq \frac{100}{n}$, užitím známého odhadu $|\sin y| \leq |y|, y \in \mathbb{R}$. Zjevně $\frac{100}{n} \to 0$ pro $n \to +\infty$, tedy $f_n \rightrightarrows 0$.

Příklad 5: $f_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2}$ na $[0, +\infty]$[2]

Funkce bodově konvergují ke konstantní funkci $f(x) = 0$. Nyní dokážeme $\sigma_n \nrightarrow 0$ resp. vyšetříme průběh funkce $f_n(x) \to f_n'\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ MAX $\to f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$.

Definice 3: Lokálně stejnoměrná konvergence

Řekneme, že $f_n(x)$ konvergují k $f(x)$ lokálně stejnoměrně v I, jestliže:

$$(\forall x_0 \in I)(\exists \delta > 0)[f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ v } I \cap U(x_0, \delta)]$$

Poznámka 12: Značení a vlastnosti lokální stejnoměrné konvergence

- Značení: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ v I, v tomto textu však budeme používat $f_n \rightrightarrows f$ v I_U – jen kvůli rychlosti psaní na PC, navíc lze rychleji nahlédnout následující bod ($I_U \subset I$).
- $f_n \rightrightarrows f$ v $I \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ v I_U... viz předchozí Poznámka 7 (její důkaz)

Věta 15. 1‘: Věta 15. 1 pro lokálně stejnoměrné funkce

Nechť f_n spojité v I, nechť $f_n \rightrightarrows$ v I_U. Potom $f \in \mathcal{C}(I)$.

Důkaz: přepíšeme: $(\forall x_0 \in I)(\exists \delta > 0): f_n \rightrightarrows f$ v $I_U \subset I$... nyní Věta 15. 1 a tedy $f \in \mathcal{C}(I_U)$. Tedy víme f spojitá v jistém okolí $\forall x_0 \in I \Rightarrow f$ spojitá v I (použití příslušné věty).

■

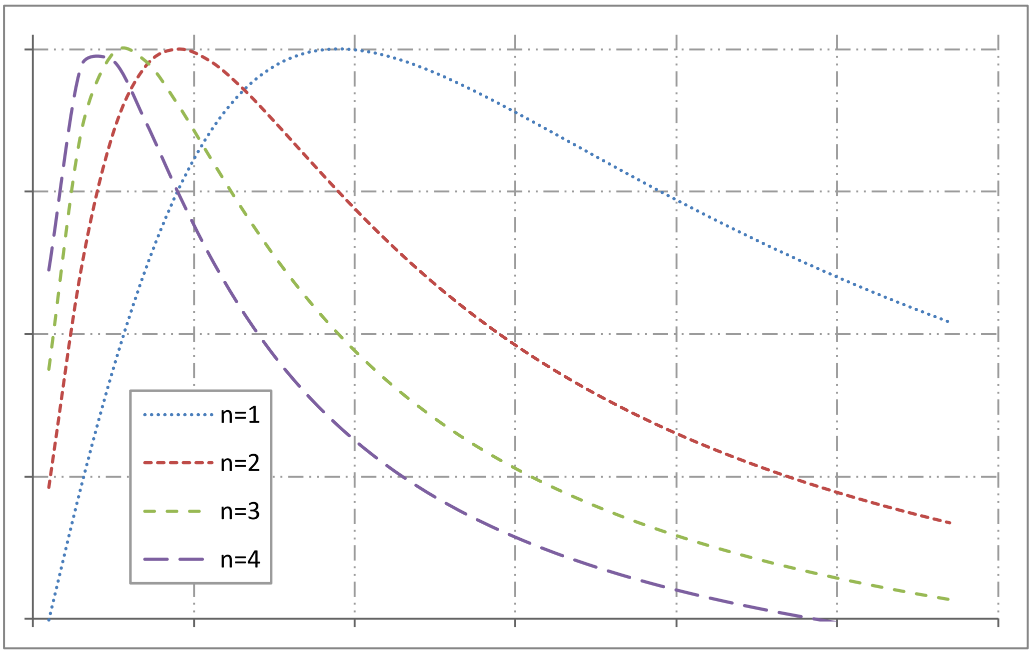
Poznámka 13: O důležitosti lokální stejnoměrnosti

[2] Autor textu si tuto funkci oblíbil, takže se k ní budeme často vracet, a postupně budeme aplikovat další nabyté znalosti a odvolávat se na předchozí úvahy. Není tedy na škodu si tento příklad opsat a podrobně si promyslet a zapsat všechny kroky!

Z dosavadních úvah plyne, že mnohem důležitější/zajímavější je množina, kde funkce stejnoměrně konverguje, než množina, kde tomu tak není. Další výhoda lokální stejnoměrnosti též lehce plyne z předchozí věty (Věta 15. 1‘), případně dalších (jen zúžení intervalu).

Příklad 6: $f_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2}$ na $[0,+\infty]$, resp. v $I \subset [0,+\infty]$, $I = ?$ tak, že $f_n \rightrightarrows$

Schematicky vidíme funkce na následujícím obrázku, přičemž jak už víme (Příklad 5) maximum mají funkce v $x = \frac{1}{n}$ a na původním intervalu neplatí $f_n \rightrightarrows$. V čem tedy nastává



problém? Zjevně na „(prudce) rostoucích úsecích“, zkusme tedy zúžit původní interval na ($\forall \eta > 0$ pevné): $f_n \rightrightarrows 0$ v $\mathrm{H} \coloneqq [\eta, +\infty)$. Nyní již vždy nalezneme n_0 tak, že $\forall n > n_0$ jsme již jen v „klesajících úsecích“, tedy $\sigma_n \coloneqq \sup_{x\in \mathrm{H}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in \mathrm{H}} f_n(x)$… přičemž (BÚNO n velké) $\Rightarrow \frac{1}{n} < \eta \Rightarrow$ v H $f_n(x)$ klesající $\Leftrightarrow \sigma_n = f_n(\eta) \to 0$.

Dále tvrdíme[3], že $f_n \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^+_U$, tedy: $\forall x_0 \in (0,+\infty) \exists \delta > 0$: $f_n \rightrightarrows 0$ v $(0,+\infty) \cap U(x_0,\delta)$… volme $\eta \in (0, x_0)$, volme $\delta > 0$ malé tak, že $(0,+\infty) \cap U(x_0,\delta) \subset \mathrm{H}$. Hotovo!

Poznámka 14: Připomenutí Bolzanovy – Cauchyho podmínky

Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konverguje (tj. $\exists a \in \mathbb{R}$: $a_n \to a, n \to +\infty$) je ekvivalentní s $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ splní (B. C.) podmínku pro posloupnosti (kapitola 7), tedy:

(B. C.) $$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)[|a_m - a_n| < \epsilon]$$

Definice 4: Stejnoměrná verze Bolzanovy – Cauchyho podmínky

[3] Připomeňme, že dolním indexem U rozumíme lokální stejnoměrnou konvergenci.

Funkce $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ splňují v I Bolzanovu – Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence pokud splní (B. C. st.), tedy:

(B. C. st.) $\quad (\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\forall x \in I)[|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon]$

Věta 15. 3: Ekvivalentní formulace $f_n \rightrightarrows$ pomocí (B. C. st.)

Jsou dány $f_n(x): I \mapsto \mathbb{R}$. Potom je následující ekvivalentní:

1. $\exists f(x): f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v I
2. $f_n(x)$ splňují v I (B. C. st.)

DŮKAZ:

1. (1.⇒ 2.): tj. chci ověřit (B. C. st.) = cíl … $\epsilon > 0$ dáno, víme $f_n \rightrightarrows f$ v I, pro jisté f, tedy:
$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in I: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$
a tedy: $\forall m, n \geq n_0 \forall x \in I$ (formálně bez proměnných)
$$|f_n - f_m| \leq |f_n - f| + |f - f_m| < 2 \times \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$
2. (1.⇐ 2.): tj. f_n splňují (B. C. st.) → cíl: $f_n \rightrightarrows$… pozoruji $\forall x \in I$ pevné, posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ díky (B. C. st.) splní též (B. C.), spec. pro tato x $\exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$. Označme tuto limitu $f(x)$… $f_n \to f$ (kandidát na $f_n \rightrightarrows$). Tedy zbývá ověřit právě zda $f_n \rightrightarrows f$. Použijme (B. C. st.) s $\frac{\epsilon}{2}$, tedy:
$$\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in I: |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} \ldots f_m(x) \to f(x), m \to +\infty$$
$$n \geq n_0, x \in I \text{ fixuji, } |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

■

Poznámka 15: Důsledek předchozí věty (Věta 15. 3)

Prostor $\mathcal{C}([a, b])$ je úplný metrický prostor s metrikou $\rho(f, g) \coloneqq \sup_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|$. Přičemž platí ekvivalence: $f_n \to f$ vůči $\rho \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$ v $[a, b]$.

DŮKAZ: Začneme nejprve důkazem ekvivalence. Výrazem „$f_n \to f$ vůči ρ“ rozumíme $\rho(f_n, f) \to 0, n \to +\infty$… přičemž jsou si definice ρ a σ (viz Lemma 15. 1.) ekvivalentní.

Nyní důkaz úplnosti. Výraz „prostor je úplný“ chápeme, $f_n \in \mathcal{C}([a, b]), \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cauchyovská vůči $\rho \Rightarrow \exists f \in \mathcal{C}([a, b]): f_n \mapsto f$ vůči ρ — rozpis výrazu „cauchyovská“:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)[\rho(f_n, f_m) < \epsilon]$$

přičemž $\rho(f_n, f_m)$ je nejnižší horní odhad $|f_n(x) - f_m(x)|$, a tedy $\forall x \in [a, b]: |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, což je definice (B. C. st.) $\Rightarrow \exists f(x): f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v $[a, b]$, navíc $f_n \in \mathcal{C}([a, b]) \to f \in \mathcal{C}([a, b])$ viz Věta 15. 1… tedy celkem $f_n \to f$ vůči ρ!

■

4.3 ZÁMĚNY OPERÁTORŮ A STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

Poznámka 16: Záměna operací — archetypální situace

Nechť X vektorový prostor a $L: X \mapsto X$ lineární operátor… $L(x+y) = L(x) + L(y) \Leftrightarrow$ záměna operací „+“ a „L“.

Nechť $f(x): U(x_0) \mapsto \mathbb{R}$ spojitá funkce v x_0 … $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) \Leftrightarrow$ záměna operací „f“ a „$\lim_{x\to x_0}$“.

Poznámka 17: Záměna operací obecně vs. stejnoměrná konvergence

Obecně není záměna možná kromě definicí, příp. dokázaných vět. Speciálně tedy obecně:

1. $f_n(x): (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}: \lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)) \neq \lim_{x\to+\infty}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))$
2. $f_n(x) \overset{*}{\to} f(x) \Rightarrow f_n'(x) \nrightarrow f'(x), n \to +\infty$… případně i stejnoměrná konvergence
3. $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ … protipříklad?
4. $\partial_{xy}^2 f \neq \partial_{yx}^2 f$ … viz kapitola 14
5. a další? …

Stejnoměrná konvergence = někdy fungující dodatečný předpoklad!

PROTIPŘÍKLAD k 1. bodu: funkce $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$

n pevné, $x \to +\infty$: $f_n(x) \to \frac{\pi}{2}$ = (levá strana), ale
x pevné, $n \to +\infty$: $f_n(x) \to 0$ = (pravá strana)

PROTIPŘÍKLAD k 2. bodu: funkce $f_n(x) = n^{-1}\sin(nx)$ na $I = \mathbb{R}$

Funkce jde bodově ke konstantní funkci $f(x) = 0$ a $\sigma_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - 0| = n^{-1} \to 0$. Tedy $f_n(x) \rightrightarrows 0$, ale $f_n'(x) = \cos nx \nrightarrow 0$!

Následující tři věty nám zajistí záměny 1, 2 a 3.

Věta 15. 4: Moore - Osgoodova věta

Nechť $f_n(x), f(x)$ jsou definovány na jistém $P(x_0, \delta)$; x_0, δ pevná.

Nechť:

1. $f_n \rightrightarrows f$ v $P(x_0, \delta)$
2. pro $\forall n$ pevná $\exists c_n \in \mathbb{R}: c_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$

Pak:

a. $\exists c \in \mathbb{R}: c = \lim_{n\to+\infty} c_n$
b. $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$

Tedy „1b=2a" – $\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$.

DůKAZ: Provedeme ve dvou krocích: důkaz $\exists c$ (tj. bod a) a rovnosti $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$ (tj. bod b).

1. Víme $\exists$ limity $\Leftrightarrow$ (B. C.) – tj. cíl: $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)[|c_m - c_n| < \epsilon]$, tedy $\epsilon > 0$ dáno a z předpokladů víme, že $f_n \rightrightarrows f$ resp. f_n splňují (B. C. st.) v $P(x_0, \delta)$ a tedy $f_n \to f$, celkem dostáváme:
   $\exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \forall x \in P(x_0, \delta): \frac{\epsilon}{2} > |f_m(x) - f_n(x)| \to |c_m - c_n|$, kde jsme již využili

limitního přechodu $x \to x_0$ (absolutní hodnota zachovává limitní přechod), díky čemuž získáváme požadovaný závěr:

   $|c_m - c_n| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ a dle příslušné věty (kapitola 7) $\exists c \in \mathbb{R}: c_n \to c, n \to +\infty$
2. cíl: $f(x) \to c$, tj. $(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)[x \in P(x_0, \eta) \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon]$ … dále pro $x \to x_0, \epsilon > 0$ dáno a n dostatečně velké, že
   - $|c_n - c| < \frac{\epsilon}{3}$… c limita c_n
   - $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}\ \forall x \in P(x_0, \eta)$ … první předpoklad („f stejnoměrná limita f_n")
   - volme $\eta: 0 < \eta < \delta: |f_n(x) - c_n| < \frac{\epsilon}{3}\ \forall x \in P(x_0, \eta)$… druhý předpoklad

Celkem:$|f(x) - c| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - c_n| + |c_n - c| < \epsilon$ na $P(x_0, \eta)$

■

Věta 15. 5: O derivaci posloupnosti funkcí člen po členu

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, nechť $f_n(x)$ jsou diferencovatelné[4] v I. Nechť existují funkce $f(x), g(x)$ splňující:

1. $f_n(x) \to f(x)$ v I
2. $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ v I_U

Potom:

a. $f(x)$ je též v I diferencovatelná
b. $f'(x) = g(x)\ \forall x \in I$

Tedy „1b=2" – $(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

DůKAZ: Idea důkazu spočívá v souvislosti derivace a limity – tedy aplikace předchozí věty (Věta 15. 4). Z toho důvodu si zavedeme pomocné funkce $\varphi_n(x), \varphi(x)$ a $\psi_{mn}(x)$ viz

[4] Připomeňme, že v takovém případě má vlastní derivace všude a tedy jsou funkce spojité!

dále v textu. Víme, že $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ v I_U – tedy:

$$\exists\delta > 0 : f_n' \rightrightarrows g \text{ na } P(x_0, \delta)$$

Cílem je $\exists f'(x_0)$ a rovnost s $g(x_0)$

Nechť $x_0 \in I$ dáno; pomocné funkce na $P(x_0, \delta)$:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &:= \big(f_n(x) - f_n(x_0)\big) \cdot (x - x_0)^{-1} \\ \varphi(x) &:= \big(f(x) - f(x_0)\big) \cdot (x - x_0)^{-1} \\ \psi_{mn}(x) &:= f_m(x) - f_n(x) \end{aligned}$$

Pozorujeme: $\lim_{x\to x_0} \varphi_n(x) = f_n'(x_0)$ - definice derivace o které víme, že existuje a $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$ pevná, neboť víme, že $f_n \to f$.

V souladu s příslušnými předpoklady viz Věta 15. 4 platí: $c_n \equiv f_n'(x_0)$, $c = g(x_0)$ a pokud $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ platí i příslušné závěry. Použijme (B. C. st.), tedy:

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)\big(\forall x \in P(x_0, \delta)\big)[|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| < \epsilon]$$

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) - \varphi_n(x) &= \Big(\underline{f_m(x)} - f_m(x_0)\Big) \cdot (x - x_0)^{-1} - \Big(\underline{f_n(x)} - f_n(x_0)\Big) \cdot (x - x_0)^{-1} = \\ &= (\psi_{mn} - \psi_{nm}) \cdot (x - x_0)^{-1} = \psi_{mn}'(\tilde{x}) \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z Lagrangeho věty, čili $\tilde{x} \in (x, x_0)$ a tedy $\tilde{x} \in P(x_0, \delta)$.

Víme, že $\exists f_n'$ a tedy $\psi_{mn}' = f_m' - f_n'$ dává smysl.

Ukázali jsme: $x \in P(x_0, \delta)$ dáno $\Rightarrow \exists\tilde{x} \in P(x_0, \delta)$ tak, že platí: $|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| = |f_m'(x) - f_n'(x)|$.

Víme, že $f_n' \rightrightarrows g \Leftrightarrow$ platí (B. C. st.) pro f_n' na $P(x_0, \delta)$; (diskutováno dříve - z předpokladů).

Celkem tedy máme (B. C. st.) pro φ_n na $P(x_0, \delta) \Leftrightarrow \varphi_n \rightrightarrows$ (prozatím ne nutně k φ)! Avšak díky předchozímu ($\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ a dále Poznámka 7 bod 1 – tedy $\varphi_n \rightrightarrows \tilde{\varphi} \Rightarrow \varphi_n \to \tilde{\varphi} \Rightarrow \tilde{\varphi} \equiv \varphi$)! Nyní Věta 15. 4:

Víme, že $\varphi_n(x)$ a $\varphi(x)$ jsou definovány na jistém $P(x_0, \delta)$; x_0, δ pevná.

Víme/dokázali jsme předpoklady věty (Věta 15. 5):

1. $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ v $P(x_0, \delta)$
2. pro $\forall n$ pevná $\exists c_n \in \mathbb{R}: f_n'(x_0) = c_n = \lim_{x\to x_0} \varphi_n(x)$

A tak dáváme požadovaný závěr:

a. $\exists c \in \mathbb{R}: c = \lim_{n\to+\infty} c_n = \boxed{g(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x_0)}$ ... již víme
b. $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = c = \boxed{f'(x_0) = g(x_0)}$

■

Věta 15. 5‘: O integrování posloupnosti funkcí člen po členu

Nechť $u_n(x) \rightrightarrows u(x)$ v I_U, nechť $U_n = \int u_n(x)\mathrm{d}x$ v I, nechť $U_n(x) \to U(x)$ v I. Potom $\int u(x)\mathrm{d}x = U(x)$ v I.

DŮKAZ: Cíl: $U'(x) = u(x), \forall x \in I$ (definice integrálu). Označ $f_n(x) = U_n(x) \to U(x)$, dále $f_n'(x) = u_n(x) \rightrightarrows u(x)$ v I… nyní již aplikace předchozí věty (Věta 15. 5).

■

5 STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE ŘAD FUNKCÍ

Při zavedení Taylorových polynomů může (měla by) vyvstat otázka, zda je možné takovým polynomem opravdu zcela přesně rekonstruovat původní funkci. I v následujících kapitolách se budeme setkávat s různými aproximacemi funkcí pomocí „polynomů“ a podobně jako v teorii Taylorových polynomů zjistíme, že čím zvyšujeme stupeň „polynomu“, tím též zlepšujeme kvalitu aproximace. Konkrétně si položme otázku, dokáže nekonečný Taylorův polynom (nekonečná suma mocnin) - tedy nekonečný součet řady - konvergovat (stejnoměrně) k původní řadě? Respektive v této sekci položíme základ pro dokázání takové vlastnosti.

Definice 5: Značení a definice stejnoměrné konvergence řad funkcí

Jsou dány $f_k(x): I \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Označme $s_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,, \forall x \in I$. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I, jestliže $\exists s(x): I \mapsto \mathbb{C}$ tak, že posloupnost $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v I. Uvedená řada konverguje lokálně stejnoměrně v I, pokud posloupnost $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v I_U, pro shodné $s(x)$. Nezapomeňme na rozdíl značení stejnoměrné konvergence $s_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} s(x)$ v I a dále v textu budeme používat $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v I_U.

Poznámka 18: Konvence a poznámky ke značení v této sekci

Formulací „jsou dány $f_k(x)$“ dále v textu rozumíme výše zapsané $f_k(x): I \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Součtem řady $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ rozumíme již zavedenou funkci $s(x): I \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{C})$, tedy $s(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x)$ – má smysl pokud $s_n(x) \to$.

5.1 PRAVIDLA PRO STEJNOMĚRNOU KONVERGENCI ŘAD

Poznámka 19: Opakování konvergence pro řady

$a_k \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konverguje $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{C}: s_n \to a \Leftrightarrow a_k$ splní (B. C. ř.) - viz V. 10. 11.

(B. C. ř.) $\quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \epsilon\right]$

Nutná podmínka konvergence (V. 10. 1.): $\sum a_k$ konv. $\Rightarrow a_k \to 0, k \to +\infty$.

Věta 15. 6: Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady funkcí

Nechť řada $\sum f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I. Potom $f_k \rightrightarrows 0$ v I.

DůKAZ: cíl: $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in I)[|f_n(x) - 0| < \epsilon]$.
Víme, že $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \rightrightarrows s(x)$ v I, pro nějaké $s(x)$… $\epsilon > 0$ dáno:

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in I: |s_n(x) - s(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

také: $\forall n \geq n_0 \forall x \in I: |f_{n+1}(x)| = |s_{n+1}(x) - s_n(x)| = |s_{n+1} - s + s - s_n| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2}$
resp. přeznač $n \coloneqq n - 1$!

■

Definice 6: Bolzano - Cauchyho podmínka pro řady - stejn. verze

Řekneme, že funkce $f_k(x)$ splňuje Bolzano - Cauchyho podmínku stejnoměrné konvergence pro řady pokud platí (B. C. ř. st.).

(B. C. ř. st.) $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \epsilon\right]$

Věta 15. 7: Ekvivalentní definice stejnoměrné konvergence pro řady

Nechť $f_k(x): I \mapsto \mathbb{C}$ dána. Potom je následující ekvivalentní:

1. $\sum f_k(x)$ splňuje (B. C. ř. st.).
2. $\sum f_k(x)$ konverguje stejnoměrně v I (tj. $s_n \rightrightarrows$ v I).

Důkaz: Převedeme na posloupnosti, konkrétně víme: $s_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \forall x \in I$. Bod 2 je ekvivalentní s: $\exists s(x): s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v $I \Leftrightarrow s_n(x)$ splní (B. C. st.) viz Věta 15. 3, tedy konkrétně: $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq n_0)(\forall x \in I)[|s_m(x) - s_n(x)| < \epsilon]$. Pozorujeme, BÚNO $m \geq n$, označ $p \coloneqq m - n$, potom:

$$s_m(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \text{ tedy bod } 2 \Leftrightarrow 1$$

■

Definice 7: Absolutní stejnoměrná konvergence řady

Řekne, že řada $\sum f_k(x)$ konverguje (lokálně) absolutně stejnoměrně v I, pokud $\sum |f_k(x)|$ konverguje (lokálně) stejnoměrně v I.

Věta 15. 8: Absolutně stejnoměrně konvergující řada konverguje též stejnoměrně

Nechť řada $\sum f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I, Potom tato řada konverguje stejnoměrně v I.

Důkaz: Přepíšeme předpoklad i závěr pomocí (B. C. ř. st.) viz Věta 15. 7. Přičemž aplikujeme trojúhelníkovou nerovnost, konkrétně:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)|\right|$$

Pozorujeme, že věta popisuje zjevný fakt (předpoklad je silnější než závěr).

■

Věta 15. 9: Weierstrassovo kritérium

Jsou dány $f_k(x): I \mapsto \mathbb{C}$, nechť $\exists \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ číselná posloupnost nezáporných členů taková, že platí následující:

1. $|f_k(x)| \leq a_k, \forall x \in I, \forall k \in \mathbb{N}$
2. $\sum_k a_k$ konverguje

Potom $\sum_k f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I.

DŮKAZ: $\sum_k f_k(x)$ konverguje absolutně stejnoměrně v I $\Leftrightarrow$ splní zde (B. C. ř. st.) pro $\sum_k |f_k(x)|$ = cíl. Dále víme $\sum_k a_k$ konverguje $\Leftrightarrow$ splní (B. C. ř.). Celkem tedy (s předpokladem 1 & $\epsilon > 0$ dáno):

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \forall x \in I: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon$$

■

Poznámka 20: Srovnávací kritérium (obecnější formulace Weierstrassova kritéria)

Jsou dány $f_k(x): I \mapsto \mathbb{C}$ a $g_k(x): I \mapsto \mathbb{R}_0^+$. Nechť $\forall k \in \mathbb{N}$ pevná platí nerovnost $|f_k(x)| \leq g_k(x), \forall x \in I$. Pokud $\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x) \rightrightarrows$ v I, pak i $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \rightrightarrows$ v I a platí nerovnost $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$.

DŮKAZ: Z předchozího důkazu viz Věta 15. 9 víme, že stačí přepsat „$\rightrightarrows$" pomocí kvantifikátorů (B. C. ř. st.) a využít předpokládané nerovnosti.

■

Poznámka 21: Weierstrassovo kritérium - poznámky

1. Pro řadu $\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$ z předchozí poznámky (Poznámka 20) se někdy používá označení „majorantní řada", tj. řada majorizující („omezující" resp. odhadující) řadu $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(x)|$ z téže poznámky (někdy označované jako „minorantní řada").
2. Věta 15. 9 (Poznámka 20) platí jen jedním směrem, v tom smyslu, že divergence majorantní řady nic neříká o řadě minorantní!!!
3. Věta 15. 9 (Poznámka 20) lze výhodně použít při majorizování číselnou řadou $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k$. Kde $\alpha_k \coloneqq \sup_{x\in I} |f_k(x)|$ resp. $\alpha_k \coloneqq \sup_{x\in I} g_k(x)$. Přičemž $g_k(x)$ může být vhodná „aproximace" vzniklá s ohledem na horní odhad původní sumy.

Příklad 7: $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$, $f_k(x) \coloneqq \sin\left(\frac{x}{k^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Tvrdím, že řada nekonverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$, neboť neplatí: $f_k(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}$! Ověříme $\sigma_k \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_k(x) - 0| = 1 \nrightarrow 0, k \to +\infty$; volíme $\frac{x}{k^2} = \frac{\pi}{2} + 2N\pi$ resp. $x = k^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ dále viz Lemma 15. 1.

Uvažme (v duchu Poznámky 13) interval $x \in I = [-M, M]$, kde $M > 0$ pevné, odhad

$$|f_k(x)| = \left|\sin\left(\frac{x}{k^2}\right)\right| \leq \left|\frac{x}{k^2}\right| = \frac{|x|}{k^2} \leq \frac{M}{k^2} =: \alpha_k$$

… hrubý odhad, ale „nepřesnosti“ se schovají do „definice M“. Nyní již stačí aplikovat Weierstrassovo kritérium viz Věta 15. 9, neboť víme $\sum k^{-b}$ konverguje $\Leftrightarrow b > 1$. Celkem tedy $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \rightrightarrows$ v I.

Příklad 8: $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x), f_k(x) \coloneqq \frac{kx}{1+(kx)^2}, x \in \mathbb{R}^+$

Z předchozího víme: $f_k(x) \rightrightarrows 0$ v $I \coloneqq [\iota, +\infty), \iota > 0$ libovolné pevné. Opět provedeme hrubý odhad $|f_k(x)| \leq \frac{1}{\iota}\frac{1}{k}$ … odtud přímo neplyne divergence, ale jsme již nahlodáni takovou myšlenkou. Zkusme tedy aplikovat negaci (B. C. ř. st.):

$$\exists \epsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \exists x \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| > \epsilon$$

Víme $f_k(x) \rightrightarrows 0$, pokud by šla monotónně, mohli bychom použít odhad $(n = p = n_0)$:

$$\left.\sum_{k=n_0+1}^{2n_0} f_k(x)\right|_{\exists x} \geq \left.\frac{2n_0 x}{1 + 4n_0^2 x^2}\right|_{x=\frac{1}{2n_0}} = 1 =: \epsilon$$

Monotonii vůči k ověříme následovně $(x \geq \iota)$:

$$\partial_k f_k(x) = \frac{x + k^2x^3 - 2k^2x^3}{(1 + (kx)^2)^2} \leq (\iota)\frac{(1 - \iota^2k^2)}{(1 - \iota^2k^2)^2} \overset{\text{symbolicky}}{\to} (> 0)\frac{(< 0)}{(\geq 0)}$$

Monotomie zjevně nastává až pro $\iota k > 1$.

Definice 8: Stejnoměrné verze omezenosti a monotonie funkčních řad

1. Řekneme, že $f_k(x)$ jsou stejnoměrně omezené (SO) v I, jestliže:

$$(\exists K > 0)(\forall x \in I)(\forall k \in \mathbb{N})[|f_k(x)| \leq K]$$

2. Řekneme, že $\sum f_k(x)$ má stejnoměrně omezené částečné součty (SOČS) v I, jestliže:

$$(\exists K > 0)(\forall x \in I)(\forall n \in \mathbb{N})\left[\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq K\right]$$

3. Řekneme, že je posloupnost $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ stejnoměrně (ryze) monotónní v I, jestliže:

$$(\forall x \in I \dots \text{pevná})(\forall k \in \mathbb{N})\left[f_k(x)\begin{Bmatrix} > \\ \geq \\ \leq \\ < \end{Bmatrix} f_{k+1}(x) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{rostoucí} \end{Bmatrix}\right]$$

4. Řekneme, že $f_k(x)$ má v I předchozí vlastnosti od jistého n_0 stejnoměrně, pokud:

$$\dots (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in I)(\forall k \geq n_0) \dots$$

Poznámka 22: Postačující vlastnosti v následujících větách (Věta 15. 10, Věta 15. 11 a Věta 15. 12)

Stačí příslušné vlastnosti z Definice 8 (body 1-3) od jistého n_0 stejnoměrně viz Definice 8 (bod 4). Analogie z číselných řad: konvergence řady „nezáleží na konečném počtu rozdílných členů" viz příslušné Lemma.

Věta 15. 10: Leibnizovo kritérium - stejnoměrná verze

Nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v I, nechť je navíc posloupnost $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ stejnoměrně nerostoucí v I. Potom platí: $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k g_k(x) \rightrightarrows$ v I.

DŮKAZ: Pomocí obecnější věty (Věta 15. 11), případně: aplikujeme Lemma 15. 1 na $s_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n}(-1)^k g_k(x)$… tedy (zápis $\sigma_n[s_n]$ chápeme jako „σ_n pro s_n"):

$$\sigma_n[s_n] = \sup_{x\in I}|s(x) - s_n(x)| = \sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k g_k(x)\right| \leq \sup_{x\in I}|g_{n+1}(x)| \to 0$$

Poslední nerovnost samozřejmě plyne z vlastnosti „stejnoměrně nerostoucí" a $\sup_{x\in I}|g_{n+1}(x)| \equiv \sigma_n[g_n(x)] \to 0$, neboť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ (opět Lemma 15. 1). V důkazu jsme byli poněkud nepoctiví, protože nám $s(x)$ spadlo z nebe. Uvědomme si, že $\forall x$ pevná platí $g_k(x) \rightrightarrows 0 \Rightarrow g_k(x) \to 0$ (i ve smyslu číselné řady) a dále $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ stejnoměrně nerostoucí je též nerostoucí. A nyní dle „klasického" Leibnize dostáváme naše $s(x)$.

■

Příklad 9: $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k g_k(x)\,, g_k(x) \coloneqq \frac{kx}{1+(kx)^2}, x \in \mathbb{R}^+$

Pokusíme se tedy aplikovat Leibnizovo kritérium – z předchozího víme, že smysl má pouze interval $I \coloneqq [\iota, +\infty)$, neboť zde $g_k(x) \rightrightarrows 0$ dokonce stejnoměrně monotónně (předpoklady věty). Tedy celkem platí: $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k g_k(x) \rightrightarrows$ v I.

Navíc dokonce $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k g_k(x) \rightrightarrows$ v $\mathbb{R}_U^+$, tj.: $\forall x_0 \in (0, +\infty)\exists \eta > 0$ t.ž. řada konverguje stejnoměrně v $(0, +\infty)$. Že tomu tak opravdu je lehce nahlédneme: $x_0 > 0$ dáno, volme

$\iota > 0: 0 < \iota < x_0$ & $\eta > 0: x_0 - \eta > \iota > 0$… schematicky —ι —(η–$x_0$–η)—→

Poznámka 23: Abelovo sumační lemma – opakování resp. obecnější formulace

Nechť $n_0, p \in \mathbb{N};\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}, i = n_0, n_0+1, \dots, n_0+p$. Označme $B_j \coloneqq \sum_{k=n_0}^{j} \beta_k$, pak:

$$\text{(A. S.)} \qquad \sum_{k=n_0}^{n_0+p} \alpha_k \beta_k = \alpha_{n_0+p} B_{n_0+p} - \sum_{k=n_0}^{n_0+p-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) B_k$$

Speciálně pokud[5] $\exists K\ \forall j \geq n_0: |B_j| \leq K \wedge \alpha_j \geq \alpha_{j+1} \geq \cdots \geq 0$, pak:

$$\text{(A. L.)} \qquad \left| \sum_{k=n_0}^{n_0+p} \alpha_k \beta_k \right| \leq \alpha_{n_0} K, \forall p \geq 1$$

DůKAZ: Provedeme pro obě tvrzení naráz (v podstatě stejně jen opakování), přičemž $n \coloneqq n_0 + p \wedge B_{n_0-1} = 0$:

$$\sum_{k=n_0}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=n_0}^{n} (B_k - B_{k-1}) \alpha_k = \sum_{k=n_0}^{n} B_k \alpha_k - \sum_{k=n_0}^{n} B_{k-1} \alpha_k =$$
$$= \sum_{k=n_0}^{n} B_k \alpha_k - \sum_{k=n_0-1}^{n-1} B_k \alpha_{k+1} = \underline{\sum_{k=n_0}^{n-1} B_k (\alpha_k - \alpha_{k+1}) + B_n \alpha_n} - \underbrace{B_{n_0-1} \alpha_{n_0}}_{=0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left| \sum_{k=n_0}^{n} \alpha_k \beta_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} \Big|\underbrace{B_k}_{\leq K}\Big| \Big|\underbrace{\alpha_k - \alpha_{k+1}}_{\cdots \geq \cdots}\Big| + \Big|\underbrace{B_n}_{\leq K}\Big| \Big|\underbrace{\alpha_n}_{\geq 0}\Big| \leq K \left(\overbrace{\sum_{k=n_0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) + \alpha_n}^{teleskopická\ suma} \right) = \underline{K \alpha_{n_0}}$$

Podtržené části jsou vlastně příslušné závěry z věty.

■

Poznámka 24: Abelova *parciální* sumace

V předchozí poznámce (Poznámka 23) jsme přeformulovali Lemma 10. 3., jež jsme nazvali Abelovo sumační lemma. Alternativně se používá též označení Abelova (parciální) sumace a my jsme ji v kapitole věnované číselným řadám využili při důkazu Abelova/Dirichletova kritéria, ostatně tak učiníme i tentokrát pro jejich stejnoměrné verze.

---

[5] V kontextu zavedeného značení: β_j má (v I) SOČS a $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ stejnoměrně klesající (v I) posloupnost nezáporných členů.

Než tak učiníme, zaměříme se na vzorec (A. S.), který může připomínat vzorec pro metodu per-partes z teorie Newtonova integrálu. A opravdu to není podobnost čistě náhodná, při uvážení (neformálně): derivace $\Leftrightarrow$ rozdíl funkčních hodnot na krajích daného intervalu dělený délkou tohoto intervalu a integrál $\Leftrightarrow$ „suma funkčních hodnot" v daném intervalu vynásobená opět délkou tohoto intervalu („plocha pod grafem funkce"). Rozvedeme nyní tuto úvahu podrobněji, byť stále za hranicí korektnosti.

Mějme spojité funkce $f(x), g(x)$ na intervalu $[a, b]$ a uvažme ekvidistantní dělení tohoto intervalu ve smyslu kapitoly Riemanův integrál - tj. dělení se „stejnou délkou" h. Potom jistě můžeme nadefinovat $n = \frac{b-a}{h}, \xi_i = x_i \ldots$ krajní body dělení a $f(\xi_i) = f(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_i$ analogicky $g(x)$ a β_i. Pro $\sum_i h\alpha_i\beta_i = h\sum_i \alpha_i\beta_i$ pak platí, že konverguje k Riemanově integrálu. Při uvážení (A. S.), příslušné věty pro charakterizaci Riemanova integrálu pomocí primitivních funkcí (ve smyslu Newtonova integrálu) a $h \to 0, n \to +\infty$, platí:

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \alpha_k\beta_k = \alpha_{\mathrm{n}}B_{\mathrm{n}} - \sum_{k=1}^{\mathrm{n}-1}(\alpha_{k+1} - \alpha_k)B_k$$

Nyní roznásobíme obě strany rovnice h a provedeme limitní přechod, díky čemuž levá strana konverguje k Riemanově integrálu. Pravou stranu upravíme následovně (s úmluvou $G(x) = \int g(x)\mathrm{d}x$):

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \alpha_n hB_n - \sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{h} hB_k\right) \to f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x$$

Než zcela opustíme vzorec (A. S.), zkombinujeme nyní integrální a sumární náhled na (A. S.). Zaveďme $\alpha_x = \alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x}, \beta_x \stackrel{\text{def}}{=} 1 \Rightarrow B_x = \lfloor x \rfloor, \mathbb{R} \ni x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ a přeformulujme (A. S.) takto:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \alpha_k\beta_k = \alpha_x B_x - \int_1^x \alpha_t' B_t \mathrm{d}t$$

Nyní tedy po dosazení a úpravách (označ $H_x \coloneqq \sum_{1 \le n \le \lfloor x \rfloor} \frac{1}{n}$):

$$H_x = \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{\mathrm{t}^2}\mathrm{d}t = \frac{x - \{x\}}{x} + \int_1^x \frac{t - \{t\}}{\mathrm{t}^2}\mathrm{d}t = 1 - \frac{\{x\}}{x} + \log x - \int_1^x \frac{\{t\}}{\mathrm{t}^2}\mathrm{d}t$$

V limitě $x \to +\infty$ pak platí (ne zcela precizně):

$$\gamma \coloneqq 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2}\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty}(H_x - \log x) \doteq 0{,}577215 \ldots \text{ Eulerova konstanta}$$

Význam této konstanty (v tomto kontextu) spočívá v onom odečítání nekonečen (řada H_x diverguje a $\ln x$ též v nekonečnu nabývá $+\infty$).

Věta 15. 11: Dirichletovo kritérium - stejnoměrná verze

Nechť $f_k(x)$ má SOČS v I, nechť $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v $I \wedge \{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ stejnoměrně monotónní a nezáporná posloupnost v I. Pak $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)g_k(x) \rightrightarrows$ v I.

DŮKAZ: Víme „$\rightrightarrows \Leftrightarrow$(B. C. ř. st.)“, dále pokud $|\sum f_k| < K \wedge g_k \rightrightarrows 0$ monotónně aplikujeme (A. L.) a máme požadovaný závěr. Nyní tedy ověříme tyto předpoklady:

Vypišme ještě nejprve (B. C. ř. st.), konkrétně:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\left[\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| < \epsilon\right]$$

1. $f_k(x)$ má SOČS $\Rightarrow |\sum f_k| < K$ (uděláme obecněji s předpokladem „stejnoměrně od jistého n_2“):

   Tedy platí $\exists K > 0 \exists n_2 \forall n \geq n_2 \forall x \in I$: $|s_n(x)| < K$ a tedy:

   $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| \leq \left|s_{n+p}(x)\right| + |s_n(x)| \leq 2K \ldots \forall p \forall n \geq n_2 \forall x \in I$

2. omezíme $|g_k(x)|$ pomocí (B. C. st.)

   Víme $g_k \rightrightarrows$ v $I \Rightarrow \exists n_1 \forall k \geq n_1 \forall x \in I$: $|g_k(x) - 0| \leq \frac{\epsilon}{2K} < \epsilon \ldots \forall p$

   Navíc BÚNO přepokládejme $\{g_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ stejnoměrně nerostoucí.
3. Nyní aplikace na (B. C. ř. st.) - vol $n_0 \coloneqq \max\{n_1, n_2\}$ a aplikuj (A. L.):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| \leq g_{n+1}(x)2K < \epsilon \ldots \forall n \geq n_0 \forall p \geq 0 \forall x \in I$$

■

Poznámka 25: O funkcích se SOČS[6]

- $(-1)^k$: funkce nezávislá na x & $|s_n(x)| \leq 1$, odtud vychází Věta 15. 10
- … a další číselné posloupnosti s omezenými částečnými součty
- $\sin kx$ resp. $\cos kx$: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{N}\}$ platí (Lemma 10. 4.):

$$s_n\left[\begin{Bmatrix}\sin\\\cos\end{Bmatrix}(x)\right] = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\cdot\begin{Bmatrix}\sin\\\cos\end{Bmatrix}\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

  použili jsme při tom [] ve smyslu „pro“ a {} ve smyslu „buď anebo“.
- $\frac{(-x)^k}{x^k}$: triviální, ale též modifikace - např.: $\frac{(-x)^k}{1+x^k} \leq \ldots$ atd.

[6] Částečné součty budeme označovat $s_n(x)$

Příklad 10: $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) g_k(x)\, ,\, f_k(x) \coloneqq \sin kx\, ,\, g_k(x) \coloneqq k^{-1}$

Pozoruji: $g_k(x) \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}, \geq 0$, stejnoměrně monotónní; $\forall \delta > 0$ pevná: $f_k(x)$ má SOČS v $I \coloneqq [\delta, 2\pi - \delta]$… konkrétně $|s_n[f_k(x)]| \leq \sin^{-1} \frac{\delta}{2}, \forall n \geq 0\ \forall x \in I$… tedy dle dirichletova kritéria platí $s_n[f_k(x) g_k(x)] \rightrightarrows$ v I … $\forall \delta > 0$.[7]

Na intervalu $J \coloneqq [0, \delta]$ přepokládáme divergenci (proč ?) — není splněna (B. C. ř. st.), konkrétně „dokážeme" její negaci, tj.:

$$\exists \epsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n \geq n_0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \exists x \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon$$

$n_0 \in \mathbb{N}$ dáno, volme $n \geq n_0$ tak, aby $\frac{\pi}{2n} \in (0, \delta)$:polož $x = \frac{\pi}{4n}, p = n$… $\frac{k\pi}{4n} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ …

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin \dfrac{k\pi}{4n}}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin \dfrac{\pi}{n}}{k} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot n \cdot \frac{1}{2n} \geq \epsilon \coloneqq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Věta 15. 12: Abelovo kritérium - stejnoměrná verze

Nechť $\sum f_k(x) \rightrightarrows$ v I. Nechť $g_k(x)$ jsou stejnoměrně omezené v I a posloupnost $\{g_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ stejnoměrně monotónní v I. Potom $\sum f_k(x) g_k(x) \rightrightarrows$ v I.

DŮKAZ: Víme „$\rightrightarrows \Leftrightarrow$(B. C. ř. st)", opět jej tedy nejprve vypíšeme:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in I) \left[\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| < \epsilon \right]$$

Víme: $\exists M > 0$: $|g_k(x)| \leq M$ … $\forall x \in I\ \forall k$… $\forall x \in I$ pevné, navíc BÚNO $\{g_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ stejnoměrně nerostoucí v $I \Rightarrow \exists \lim_{k \to +\infty} g_k(x)$ konečná … označme ji $g(x)$.

Nyní v duchu důkazu „klasické" verze definujme: $h_k(x) \coloneqq g_k(x) - g(x)$ … zjevně $h_k \to 0$ a $\{h_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ stejnoměrně klesající posloupnost nezáporných členů v I. Navíc $|h_k(x)| \leq |g_k(x)| + |g(x)| \leq 2M$.

Nechť $\epsilon > 0$ dáno: víme $\sum f_k(x) \rightrightarrows \Leftrightarrow$(B. C. ř. st.) … tedy:

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall p \geq 1 \forall x \in I: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \frac{\epsilon}{3M}$$

Celkem: $|\sum f_k(x) g_k(x)| \leq |\sum f_k(x) g(x)| + |\sum f_k(x) h_k(x)| \stackrel{\text{def}}{=} P_1 + P_2$

[7] Použili jsme opět zkrácený zápis $s_n[\dots]$ ve smyslu „částečné součty pro funkci …".

$$\to P_1 = \underline{|g(x)|}|\sum f_k(x)| < \underline{M}\frac{\epsilon}{3M} = \frac{\epsilon}{3}$$

$$\to P_2 \leq \Big|_{\text{(A. L.)}} \underline{h_{n+1}(x)} \cdot \max_p |\sum f_k(x)| \leq \underline{2M}\frac{\epsilon}{3M} = \frac{2}{3}\epsilon$$

Celkem: $P_1 + P_2 < \epsilon$

■

Příklad 11: $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = \ln(1+x) \ldots x \in (-1,1)$ … viz min. sem.

Řada konverguje v $I \coloneqq [0,1]$ … tj. „protáhneme" do $x = 1$.

Víme, že řada $f_k(x) \coloneqq \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje dle „klasického" Leibnize, dokonce stejnoměrně - nezávisí na x. Dále $g_k(x) \coloneqq x^k$ … $|g_k(x)| \leq 1\ \forall k, x^k \geq x^{k+1}\ \forall x \in [0,1]$.

$$s_{+\infty}(1) = \Big|_{\text{spojitost}} \lim_{x\to 1-} s_{+\infty}(x) = \Big|_{\text{"=" na } P\_(1)} \lim_{x\to 1-} (\ln 1 + x) = \ln 2$$

5.2 VLASTNOSTI A ZÁMĚNY OPERÁTORŮ STEJNOMĚRNĚ KONVERGUJÍCÍCH ŘAD

Věta 15. 13: O přenosu spojitosti stejnoměrně konvergující řady

Nechť $f_k(x) \in \mathcal{C}(I), \forall k \in \mathbb{N}$, nechť $\sum f_k(x) \rightrightarrows$ v I. Potom i součet $s(x) \in \mathcal{C}(I)$.

DůKAZ: Z minulého semestru: $s_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \in \mathcal{C}(I), \forall n \in \mathbb{N}$. Nyní již použijeme předpoklad $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ v I a nyní Věta 15. 1 $\Rightarrow s(x) \in \mathcal{C}(I)$.

■

Poznámka 26: Diniho věta

Věta 15. 13 vybízí k otázce, zda by naopak „pouze" spojitost členů řady a jejího součtu nestačila k tomu, aby řada konvergovala stejnoměrně. A opravdu, ještě při uvážení jisté závislosti mezi stejnoměrnou a bodovou konvergencí (Poznámka 7 bod 1.), máme v podstatě celou větu, která toto zaručuje, konkrétně:

Nechť $f_k(x) \in \mathcal{C}(I)$, nechť $\exists s(x) \in \mathcal{C}(I): \sum f_k(x) \to s(x)$. Nechť $s_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \wedge \{s_n(x)\}$ stejnoměrně monotónní v I. Pak $\sum f_k(x) \rightrightarrows$ v I. (Pozn.: I omezený a uzavřený interval).

DůKAZ (rámcový): Lemma 15. 1.: $\sigma = \sup_I |s_n - s| \overset{?}{\to} 0$. „?" souvisí s předpoklady - spojitost, monotonie, omezený a uzavřený interval.

■

Věta 15. 14: O integrování řad člen po členu

Nechť $f_k(x) \in \mathcal{C}(I)$, kde $I \coloneqq [a,b]$ omezený uzavřený (tedy kompaktní) interval. Nechť $s_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ & $s_n \rightrightarrows$ v I. Potom:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_a^b f_k(x) \mathrm{d}x \right)$$

DŮKAZ: „$\sum_{k=1}^{+\infty} \overset{!}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}$“… Víme: $\exists s(x){:}\, s_n \rightrightarrows s$ v I… nyní Věta 15. 5 pro (částečné) součty ⇒ „$\lim \int s_n \Leftrightarrow \int s$“ → „LS ⇔ PS“

PS: $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$,pak jistě $s_n \to s$ pro $\forall x \in I$ pevná … aplikuj$\int$

LS: $\int s_n = \int \sum f_k \overset{!}{=} \sum \int f_k$ … aplikuj lim

Ad (!): linearita + konečný součet

∎

Poznámka 27: Typ integrálu v předchozí větě (Věta 15. 14)

Rychlá odpověď - jakýkoliv / podrobná: $f_n \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow s_n \in \mathcal{C}([a,b]) \Rightarrow s \in \mathcal{C}([a,b])$ (Věta 15. 13)… Integrály $((\mathcal{N});(\mathcal{R});\ldots)$ mají smysl a rovnají se, obdobně jejich vlastnosti (linearita, …).

Věta 15. 15: O derivaci řad člen po členu

Nechť $f_k(x)$ jsou diferencovatelné (a tedy spojité) v I, kde $I \subset \mathbb{R}$ otevřený. Nechť $\forall x \in I$ pevná $s_n(x) \coloneqq \sum f_k(x) \to$, nechť $\sum f_k'(x) \rightrightarrows$ v I_U. Potom i součet $s(x)$ je diferencovatelný a platí:

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(x)$$

DŮKAZ: $s_n(x)$ zjevně diferencovatelné (konečná suma → VoAritmetice derivací viz první semestr). Tj. zaručí předpoklady stejnou vlastnost i pro $s(x)$? Víme:

$$\exists s(x){:}\, s_n \rightrightarrows s \ \forall x \in I \text{ pevná}$$
$$\exists g(x){:}\, s_n' \rightrightarrows g(x) \text{ v } I_U$$

Zjevně tedy již jen stačí aplikovat příslušnou větu pro posloupnosti (Věta 15. 5) ⇒ $s(x)$ je diferencovatelná a navíc $s'(x) \equiv g(x) \forall x \in I$. Z definic $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\,, g(x) =$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} f_k'(x)$.

6 ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Poznámka 28: Možná zobecnění předchozích vět

Resp. uvážení $f, f_k(x): I \mapsto Y \dots I \subset X \dots (X, \rho) \wedge (Y, \sigma)$ metrické prostory. Tedy zjevně platí předchozí věty při uvážení kapitoly Metrické prostory z předchozího semestru.
Speciálně:

Pro posloupnosti - pro přenos spojitosti (Věta 15. 1) může být X obecný metrický prostor, Věta 15. 2 lze též přímočaře aplikovat pro X obecný prostor s mírou avšak (analogický problém viz Poznámka 8) míra celého prostoru musí být konečná. Věta 15. 4 – zde lze konvergence $x_n \to x_0$ resp. $n \to +\infty$ nahradit libovolnými konvergencemi v jakémkoliv metrickém prostoru.

Pro řady - Y vektorový prostor.

Pro věty o B. C. podmínce musí být Y úplný prostor.

Poznámka 29: Poznámky k mocninným řadám

1. Nechť $\exists r, R: r < R \Rightarrow$ moc. řada konverguje absolutně stejnoměrně v $U(0, r)$.
2. (Abelova věta) Nechť moc. řada konverguje (i nebodově) pro $x = z \in \mathbb{C}$, zde $|z| = R$. Potom mocninná řada $\rightrightarrows$ na úsečce mezi 0 a z.
3. (Abelova věta) Nechť $\exists \varphi \in \mathbb{R}: \sum a_n \left(Re^{i\varphi}\right)^n$ konverguje, pak mocninná řada konverguje stejnoměrně na množině $\left\{z = te^{i\varphi}, t \in [0, R]\right\}$.

DůKAZ (částečný): pro 1. tvrzení stačí použít stejnou definici pro R jako v příslušné kapitole a pro $x \in U(0, r)$ pak stačí rozšířit členy posloupnosti $\rho/\rho \dots \rho > r$ a část omezit konstantou (definice R) a druhá část dává dle Weierstrasse požadovaný závěr. Pro 3. tvrzení využijeme $a_n\left(te^{i\varphi}\right)^n = a_n\left(Re^{i\varphi}\right)^n \left(\frac{t}{R}\right)^n$ & Abelova kritéria. 2. tvrzení je jen triviálním důsledkem pro $\varphi = 0$.

■

7 PŘEHLED DEFINIC, LEMMAT, VĚT, POZNÁMEK A PŘÍKLADŮ

8 POUŽITÁ A DOPORUČENÁ LITERATURA

[1] *Přednáška Matematika pro fyziky (NMAF061) ZS 2012/13, přednášející: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., web přednášky: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/061/, aktuální k 28.12.2013*
[2] *prof. RNDr. Vladimír Souček, DrSc.: Matematická analýza II., skripta v elektronické podobě zde: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~soucek/, aktuální k 28.12.2013*
[3] *J. Kopáček: Matematická analýza nejen pro fyziky (III), 3. upr. vyd., Praha: Matfyzpress, 2007, ISBN 978-80-7378-020-3*