18. Lebesgueův integrál.

Cíl kapitoly. Cílem kapitoly je definovat $\int_M f\,d\lambda$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $f(x) : M \to \mathbb{R}$ je funkce a $\lambda = \lambda_n$ je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$.
Chceme, aby integrál fungoval pro co nejširší třídu funkcí, a měl některé rozumné vlastnosti:

- $\int_M (f+g) = \int_M f + \int_M g$ (linearita)
- $f \le g \implies \int_M f \le \int_M g$ (monotonie)
- $\int_M c = c\lambda(M)$
- rozumné věty o „záměně limity a integrálu", tj. (za vhodných předpokladů):

$$\lim_{j\to\infty} \int_M f_j = \int_M \lim_{j\to\infty} f_j, \qquad \frac{d}{da}\int_M f = \int_M \frac{\partial f}{\partial a}, \qquad \text{atd.}$$

Nám dosud známé integrály (Riemannův a Newtonův) fungují jenom pro M rovná se reálný interval; především však integrují příliš málo funkcí a nemají žádné (rozumně použitelné) věty o záměně limity a integrálu.
Názorný význam integrálu je „objem pod grafem funkce". Protože míru (objem) už umíme měřit ve všech $\mathbb{R}^n$, mohli bychom rovnou definovat:

$$\int_M f d\lambda_n = \lambda_{n+1}(\Gamma^+) - \lambda_{n+1}(\Gamma^-), \tag{1}$$

kde

$$\Gamma^+ = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in M,\ 0 < y < f(x)\big\},$$
$$\Gamma^- = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in M,\ f(x) < y < 0\big\}.$$

My podáme složitější (nicméně ekvivalentní) definici – ze dvou důvodů:

1. z definice (1) bychom těžko dokazovali například linearitu
2. níže uvedená definice zahrne obecnou situaci integrování podle libovolné míry (tj. nejen Lebesgueovy)

Značení. Máme prostor s mírou $(X, \mathscr{M}, \lambda)$, tj. $\mathscr{M}$ je σ-algebra měřitelných podmnožin X a λ je míra. Dále bude a $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \in \mathscr{M}$. (Lebesgeueova míra bude důležitý speciální případ.) Budeme také značit:

$$\{f > c\} = \{x \in M;\ f(x) > c\}, \qquad \{f \in I\} = \{x \in M;\ f(x) \in I\}, \quad \text{atd.}$$

Definice. Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ se nazve měřitelná, jestliže M je měřitelná množina a dále pro každé $c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f > c\}$ měřitelná.

Lemma 18.1. [Ekvivalentní definice měřitelnosti.] Nechť M je měřitelná množina a $f : M \to \mathbb{R}$. Potom je ekvivalentní:

1. f je měřitelná;
2. pro $\forall c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f \geq c\}$ měřitelná;
3. pro $\forall c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f < c\}$ měřitelná; nebo $\forall c \in \mathbb{R}$ je množina $\{f \leq c\}$ měřitelná;
4. pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je množina $\{f \in I\}$ měřitelná;
5. pro každou otevřenou $G \subset \mathbb{R}$ je množina $\{f \in G\}$ měřitelná.

Lemma 18.2 Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $f : M \to \mathbb{R}$. Nechť $M = G \cup N$, kde G je otevřená v $\mathbb{R}^n$, f je spojitá v G, a N je množina míry nula. Potom f je měřitelná v M.

Důsledek. Je-li $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ spojitá všude až na konečně bodů, je měřitelná v (a, b).

Lemma 18.3. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je měřitelná; nechť $f(M) \subset G$, kde G je otevřená (v $\mathbb{R}$). Nechť $\phi : G \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $\phi \circ f$ je měřitelná v M.

Poznámka. Při obráceném pořadí skládání (vnitřní spojitá, vnější měřitelná) nemusí vyjít měřitelná funkce.

Věta 18.1. [Zachování měřitelnosti.] Nechť f, g, $f_j : M \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Potom

1. αf, $f + g$, $f - g$, fg jsou měřitelné; f/g je měřitelné na množině $\{g \neq 0\}$;
2. $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, f^+, f^-, $|f|$ jsou měřitelné;
3. $\sup_j f_j$, $\inf_j f_j$ jsou měřitelné; jestliže existuje bodová limita $\lim_j f_j$, je též měřitelná.

Poznámka. V průběhu důkazu jsme odvodili užitečné vyjádření

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \sup_n \big(\inf_{j \geq n} f_j(x) \big).$$

Definice. Charakteristickou funkcí množiny A rozumíme

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A. \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ se nazve jednoduchá v M, jestliže existují měřitelné množiny $A_j \subset M$ a čísla $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ tak, že

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x), \qquad x \in M.$$

Poznámky. ① Jednoduchou funkci lze vyjádřit více způsoby; vyjádření je jednoznačné, pokud požadujeme, aby A_j byly disjunktní a čísla c_j vzájemně různá.

② Pozorování: f je jednoduchá v $M \iff f$ je měřitelná v M a $f(M)$ je konečná množina

Věta 18.2. Nechť f je nezáporná, měřitelná funkce v M. Potom existují nezáporné, jednoduché funkce f_k takové, že $f_k(x) \to f(x)$ a navíc posloupnost $\{f_k(x)\}_k$ je neklesající pro každé $x \in M$.

Značení. Výše uvedený způsob konvergence značíme stručně: $0 \le f_k \nearrow f$.

Definice. [Abstraktní Lebesgueův integrál.] Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce.

1. je-li f jednoduchá, tj. $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}$, definujeme $\int_M f d\lambda = \sum_{j=1}^n c_j \lambda(A_j)$.
2. je-li f nezáporná, klademe
$$\int_M f d\lambda = \sup\Big\{ \int_M s d\lambda;\ s \text{ jednoduchá v } M,\ 0 \le s \le f\Big\}.$$
3. pro obecnou f definujeme ($f^+ = \max\{0, f\}$, $f^- = \max\{0, -f\}$)
$$\int_M f d\lambda = \int_M f^+ d\lambda - \int_M f^- d\lambda,$$
má-li pravá strana smysl (tj. není tvaru $\infty - \infty$).

Terminologie a značení. Chceme-li zvýraznit proměnnou, píšeme $\int_M f(x) d\lambda(x)$. Naopak v případě $M \subset \mathbb{R}^n$ a λ - Lebesgueueova míra vynecháme symbol pro míru, tj. píšeme pouze $\int_M f(x) dx$.
Symbolem $\mathcal{L}^*(M)$ značíme funkce, pro něž je integrál definován (může být nekonečný).
Symbolem $\mathcal{L}(M)$ značíme funkce, pro něž je integrál definován a navíc je konečný. V této situaci říkáme, že integrál konverguje, neboli funkce je integrovatelná.

Poznámky. Definice je korektní: integrál jednoduché funkce nezávisí na jejím vyjádření. Druhý krok je zobecněním prvního.

Věta 18.3. Nechť $f, g : M \to \mathbb{R}$ se rovnají skoro všude v M. Potom f je měřitelná, právě když g je měřitelná, a
$$\int_M f d\lambda = \int_M g d\lambda,$$
– má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.

Zobecnění definice. Nechť f je definována skoro všude v M. Tj. $f(x) : \tilde{M} \to \mathbb{R}$, kde $M = \tilde{M} \cup N$, $\lambda(N) = 0$. Definujme $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ takto:
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \tilde{M}, \\ \text{libovolně (např. 0)}, & x \in N. \end{cases}$$

Funkce f se nazve měřitelná v M, je-li $\tilde{f}$ měřitelná v M; a definujeme
$$\int_M f d\lambda = \int_M \tilde{f} d\lambda.$$

Díky předchozí větě nezávisí výsledek na dodefinování v množině N.

Příklady. ① $f(x) = 1/x$ je měřitelná v $\mathbb{R}$ ($N = \{0\}$).
② Je-li $D(x)$ Dirichletova funkce, pak $\int_{\mathbb{R}} D d\lambda_1 = 0$. Například proto, že $D = 0$ skoro všude.

Zobecnění definice 2. Budeme připouštět, aby měřitelné funkce nabývaly hodnot $\pm\infty$. (Připomeňme úmluvu $0 \cdot \pm\infty := 0$, která platí při výpočtu míry nebo integrálu.)

Věta 18.4. [Leviho věta.] Nechť f_n, f jsou měřitelné v M, a nechť $0 \leq f_n(x) \nearrow f(x)$ s.v. v M. Potom $\int_M f_n \, d\lambda \to \int_M f \, d\lambda$.

Věta 18.5. [Vlastnosti Lebesgeueova integrálu.] Nechť f, $g \in \mathcal{L}^*(M)$. Potom:

1. (i) $\int_M \alpha f \, d\lambda = \alpha \int_M f \, d\lambda$;
   (ii) $\int_M (f + g) \, d\lambda = \int_M f \, d\lambda + \int_M g \, d\lambda$, má-li pravá strana smysl;
2. (i) $f \leq g$ s.v. v $M \implies \int_M f \, d\lambda \leq \int_M g \, d\lambda$;
   (ii) $\left| \int_M f \, d\lambda \right| \leq \int_M |f| \, d\lambda$;
3. je-li f *nezáporná* s.v. v M, pak:
   (i) $\int_M f \, d\lambda < \infty \implies f < \infty$ s.v. v M;
   (ii) $\int_M f \, d\lambda = 0 \iff f = 0$ s.v. v M.

Poznámky. Vlastnosti množiny $\mathcal{L}(M)$ integrovatelných funkcí:
① f, $g \in \mathcal{L}(M) \implies \alpha f$, $f + g \in \mathcal{L}(M)$ (vektorový prostor)
② $f \in \mathcal{L}(M) \iff f$ je měřitelná a $\int_M |f| \, d\lambda < \infty$
③ f měřitelná, $|f| \leq g$ s.v. v M, kde $g \in \mathcal{L}(M) \implies f \in \mathcal{L}(M)$

Poznámka. Záměna limity a integrálu, neboli rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\lambda = \int_M \big(\lim_{n\to\infty} f_n \big) \, d\lambda \qquad (*)$$

obecně neplatí. Příklad: $f_n(x)(x) = n\chi_{(0,1/n)}(x)$. Potom $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, přitom $f_n(x) \to 0$ v $\mathbb{R}$, tedy vlevo je 1, vpravo 0. – Rovnost (*) platí, pokud navíc předpokládáme: • $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ v M, a $\lambda(M) < \infty$ (viz věta 15.2.) To jsou pro praktické účely příliš silné předpoklady. • $0 \leq f_n \nearrow f$ skoro všude v M – to je Leviho věta. • třetí případ je následující věta.

Věta 18.6. [Lebesgueova věta.] Nechť funkce f_n, f jsou měřitelné v M, $f_n(x) \to f(x)$ pro skoro všechna $x \in M$. Nechť existuje $g \in L(M)$ tak, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ skoro všude v M. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\lambda = \int_M \big(\lim_{n\to\infty} f_n \big) \, d\lambda \, .$$

Věta 18.7. [Leviho věta pro řady.] Nechť f_k jsou nezáporné, měřitelné v M. Potom

$$\int_M \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big) \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k \, d\lambda \, .$$

Příklad.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^k\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x^k\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty\,.$$

Věta 18.8. [Lebesgueova věta pro řady.] Nechť f_k jsou měřitelné funkce, nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = g(x)$ s.v. v M. Nechť existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \le g(x)$ pro $\forall n$, s.v. $x \in M$. Potom

$$\int_M \big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\big)\, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k\, d\lambda\,.$$

Příklad.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k x^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\,.$$

Majorantou částečných součtů je – vzhledem k teleskopičnosti sumy – první člen $f_0 = 1$.

Poznámka. Na množinách konečné míry mi jako integrovatelná majoranta může posloužit konstantní funkce. Získáváme tím variantu Lebesgueovy věty: nechť $f_n(x) \to f(x)$ s.v. v M, nechť $|f_n(x)| \le C$ pro s.v. $x \in M$, a nechť $\lambda(M) < \infty$. Potom $\int_M f_n\, d\lambda \to \int_M f\, d\lambda$.

Věta 18.9. [Závislost integrálu na množině integrace.] Nechť f je měřitelná v M. Potom:

1. Jestliže $M = \bigcup_{j=1}^{N} M_j$, kde M_j jsou disjunktní, měřitelné, pak

   $$\int_M f\, d\lambda = \sum_{j=1}^{N} \int_{M_j} f\, d\lambda,$$

   má-li pravá strana smysl.

2. Nechť $f \ge 0$ nebo $f \in \mathcal{L}(M)$. Jestliže $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$, kde M_j jsou disjunktní, měřitelné, pak

   $$\int_M f\, d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{M_j} f\, d\lambda.$$

3. Nechť $f \ge 0$ nebo $f \in \mathcal{L}(M)$. Jestliže $M = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} M_j$, kde M_j měřitelné a $M_j \subset M_{j+1}$, pak

   $$\int_M f\, d\lambda = \lim_{j\to\infty} \int_{M_j} f\, d\lambda.$$

Poznámky. ① V předchozím důkazu se odvodí důležitý vztah:

$$\int_N f\, d\lambda = \int_M f \cdot \chi_N\, d\lambda$$

pro libovolnou měřitelnou $N \subset M$. Speciální důsledek: jestliže $N \subset M$ a $\lambda(M \setminus N) = 0$, pak $\int_N f \, d\lambda = \int_M f \, d\lambda$.
② Předpoklad „$f \geq 0$ nebo $f \in \mathcal{L}(M)$" v bodech 2, 3 předchozí věty je podstatný. Stačilo by předpokládat $f \in \mathcal{L}^*(M)$; NESTAČILO by předpokládat „má-li pravá strana smysl".

Věta 18.10. [Výpočet Lebesgueova integrálu v $\mathbb{R}$.] Nechť $f(x) : I \to \mathbb{R}$ je spojitá, kde $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť je splněn jeden z předpokladů:
1. $f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) \leq 0$) všude v I
2. $\int_a^b |f(x)| \, dx < \infty$
Potom

$$\int_a^b f \, d\lambda_1 = \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x) \, ,$$

kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$.

Poznámky. • věta v podstatě tvrdí rovnost Lebesgueova a Newtonova integrálu (za daných předpokladů)
• předpoklad 1 nebo 2 je podstatný; lze najít spojitou funkci, jejíž Lebesgueův integrál neexistuje, avšak přírustek primitivní funkce má smysl (dokonce je konečný).
• předpoklad 2 se může ověřovat pomocí bodu 1 (neboť $|f| \geq 0$)
Poznámka. Problém: integrály závislé na parametru – studujeme funkce tvaru

$$F(a) = \int_J f(a, x) \, dx \, .$$

Pozor: F není primitivní funkce k f. Integruje se podle x, interval J je pevný. Nás zajímá závislost na a.

Příklad.

$$F(a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-|a|x} \sin(ax) \, dx.$$

Přímý výpočet dá $F(a) = 1/2a$ pro $a \neq 0$, $F(0) = 0$. Vidíme, že $F(a)$ je nespojitá, třebaže integrand závisí na a spojitě. Vidíme, že předpoklad (iii) v následující větě nelze vynechat.

Značení. Je-li $f(a, x)$ funkce dvou proměnných, značí $f(a, \cdot)$ funkci jedné proměnné (tj. x), která vznikne, pokud a fixujeme. Podobně $f(\cdot, x)$ je funkcí jedné proměnné a při pevném x.

Věta 18.11. [Spojitá závislost integrálu na parametru.] Nechť $f(a, x) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde I, $J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly. Předpokládáme:
(i) pro $\forall a \in I$ pevné je $f(a, \cdot)$ měřitelná v J.
(ii) pro s.v. $x \in J$ je $f(\cdot, x)$ spojitá v I.
(iii) existuje $g \in L(J)$ tak, že $|f(a, x)| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in J$ a pro každé $a \in I$.
Potom je funkce

$$F(a) = \int_J f(a, x) \, dx$$

konečná a spojitá v I.

Příklady. ① Funkce

$$F(a) = \int_0^{100} \frac{a^2x^2}{a^4 + x^4}\, dx$$

je spojitá v $\mathbb{R}$.
② Gamma funkce

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$$

je spojitá v $(0, \infty)$.
Poznámka. Dále nás zajímá, zda platí

$$\frac{\partial}{\partial a} \int\limits_J f(a,x)\, dx = \int\limits_J \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)\, dx\,.$$

Jde v podstatě o záměnu integrálu a limity(=derivace), tedy taková rovnost nemusí platit vždy. Srovnej předpoklad (iii) v následující větě.

Věta 18.12. [Derivace integrálu podle parametru.] Nechť $f(a,x) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde I, $J \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly, I je otevřený. Předpokládáme:
(i) pro $\forall a \in I$ pevné je $f(a,\cdot)$ měřitelná v J.
(ii) pro s.v. $x \in J$ je $f(\cdot,x)$ diferencovatelná v I (tj. $\exists$ konečná $\frac{\partial}{\partial a} f(a,x)$ pro $\forall a \in I$)
(iii) existuje $g \in L(J)$ tak, že $|\frac{\partial}{\partial a} f(a,x)| \le g(x)$ pro s.v. $x \in J$ a pro každé $a \in I$.
(iv) existuje $a_0 \in I$ tak, že $f(a_0,\cdot) \in L(J)$ (tj. $\int_J |f(a_0,x)|\, dx < \infty$.)
Potom funkce $F(a) = \int_J f(a,x)\, dx$ je konečná a

$$F'(a) = \int\limits_J \frac{\partial}{\partial a} f(a,x)\, dx$$

pro každé $a \in I$.

Příklady. ① $F(a) = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)\, dx$; $F'(a) = \frac{\ln a}{a^2-1}$.
② Pro gamma funkci platí: $\Gamma'(s) = \int_0^{\infty} (\ln x) x^{s-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$,
$\Gamma''(s) = \int_0^{\infty} (\ln x)^2 x^{s-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx > 0$, – a tedy je ryze konvexní.

Poznámka. Ještě ke značení: je-li $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$, tak Lebesgueův integrál značíme $\int_M f\, d\lambda_n$, nebo $\int_M f(x)\, dx$, nebo $\int_M f(x)\, d\lambda_n(x)$. Závisí na tom, zda chceme zdůraznit míru, nebo proměnnou, nebo obojí. Pokud chceme vyznačit jednotlivé složky proměnné, píšeme $\int_M f(x,y)\, dxdy$, nebo $\int_M f(x,y,z)\, dxdydz$.
Význam symbolu je ale vždy tentýž. Někdy se také píše $\iint$, $\iiint$ místo $\int$, aby se zdůraznilo, že jde o dvourozměrný (třírozměrný) integrál.

Značení. Pro $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ značíme proměnnou (x,y), $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Definujeme projekci M do $\mathbb{R}^n$

$$\Pi_n M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \exists y \in \mathbb{R}^m,\ (x,y) \in M\}$$

a pro $x \in \Pi_n$ pevné definujeme řez množinou M vzhledem k y

$$M^x = \{y \in \mathbb{R}^m;\ (x, y) \in M\}\,.$$

Jestliže $f = f(x, y)$, tak $f(x, \cdot)$ značí funkci proměnné y, které vznikne fixováním x.

Věta 18.13. [Fubiniho věta.] (S použitím předchozího značení.) Nechť $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$, nechť $f(x, y) \in L^*(M)$. Potom pro skoro všechna $x \in \Pi_n$ je $M^x \subset \mathbb{R}^m$ měřitelná množina, a $f(x, \cdot) \in L^*(M^x)$.
Označíme-li $g(x) = \int_{M^x} f(x, \cdot) d\lambda_m$, je $g(x) \in L^*(\Pi_n)$ a platí

$$\int_M f\, d\lambda_{n+m} = \int g\, d\lambda_n$$

neboli (v názornějším značení)

$$\int_M f(x, y)\, dxdy = \int_{\Pi_n} \left(\int_{M^x} f(x, y)\, dy \right) dx\,.$$

Příklad. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$, $f(x, y) = |x|$. Potom $\Pi_1 M = (-1, 1)$, $M^x = (-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2})$, tedy

$$\int_M |x|\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |x|\, dy \right) dx = \frac{4}{3}\,.$$

Poznámky. Mechanické použití Fubiniho věty v případě, že $f \notin L^*(M)$, tj. původní vícenásobný integrál neexistuje, vede k nesmyslným výsledkům:
$M = (0, \infty) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x + 1 \\ -1, & y < x < y + 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Potom $\int_M f(x, y)\, dxdy$ neexistuje (integrál kladné i záporné části je ∞), avšak

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x, y)\, dy \right\} dx = -\frac{1}{2}\,,$$

zatímco

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(x, y)\, dx \right\} dy = \frac{1}{2}\,.$$

• předpoklad $f \in L^*(M)$ je určitě splněn, pokud $f \geq 0$, nebo pokud $\int_M |f| < \infty$ (druhý předpoklad může ověřit pomocí Fubiniho věty, neboť $|f| \geq 0$).

• speciálně, výpočet objemu pomocí Fubiniho věty:

$$\lambda_{n+m}(M) = \int_M 1\, d\lambda_{n+m} = \int_{R^n} \left\{ \int_{M^x} 1\, d\lambda_m \right\} d\lambda_n = \int_{R^n} \lambda_m(M^x)\, d\lambda_n$$

Příklad. Použití Fubiniho věty k výpočtu původně jednorozměrného integrálu:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx\,.$$

Integrovaná funkce je přírustek, tj. integrál derivace

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b x^y\, dy\,.$$

Dvojím užitím Fubiniho věty ($M = (0,1) \times (a,b)$)

$$I = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y\, dy \right) dx = \int_M x^y\, dxdy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y\, dx \right) dy = \ln \frac{b+1}{a+1}\,.$$

Opakování. Věta o substituci pro Newtonův integrál:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|\, dx$$

kde $\varphi(x) : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je vzájemně jednoznačná, a $\varphi'(x) \neq 0$.

Definice. Pro $\varphi(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definujeme Jakobián

$$J\varphi(y) = \det \nabla\varphi(y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(y)}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Definice. Nechť Ω, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny. Zobrazení $\varphi(y) : \Omega \to M$ se nazve difeomorfismus, jestliže:
1. $\varphi(y)$ je vzájemně jednoznačné,
2. $\varphi(y)$ je C^1 (tj. parciální derivace jsou spojité),
3. $J\varphi(y) \neq 0$ pro $\forall y \in \Omega$.

*** Věta 18.14.** [Věta o substituci.] Nechť Ω, $M \subset \mathbb{R}^n$ jsou otevřené množiny, $\varphi(y) : \Omega \to M$ je difeomorfismus a $f(x) : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ měřitelná funkce. Potom

$$\int_M f(x)\, dx = \int_\Omega f(\varphi(y)) |J\varphi(y)|\, dy\,,$$

neboli

$$\int_M f\,d\lambda_n = \int_\Omega (f\circ\varphi)|J\varphi|\,d\lambda_n\,.$$

(Má-li jedna strana smysl, má ho i druhá a rovnají se.)

Poznámka. Význam věty o substituci pro vícerozměrné integrály je často v tom, že získám příjemnější (z hlediska Fubiniho věty) tvar množiny, přes kterou integruji.

Příklad. Plocha množiny M, ohraničené přímkami: $x+y=1$, $x+y=2$, $y=3x$, $y=4x$. Substituce: $u=x+y$, $v=y/x$, neboli toto je zobrazení $\varphi^{-1}: M\to\Omega$, kde $\Omega=(1,2)\times(3,4)$.
$\varphi:\Omega\to M$ má tvar $x=u/(1+v)$, $y=uv/(1+v)$, jakobián $J\varphi=u/(1+v)^2$. Tedy

$$\lambda_2(M)=\int_M 1\,dxdy=\int_\Omega \frac{u}{(1+v)^2}\,dudv=\int_1^2\left(\int_3^4\frac{u}{(1+v)^2}\,dv\right)du=\frac{3}{40}\,.$$

Polární souřadnice. Substituce $x=r\cos u$, $y=r\sin u$, tj. $\varphi:(r,u)\mapsto(x,y)$ je difeomorfismus z $\Omega=(0,\infty)\times(0,2\pi)$ do $\mathbb{R}^2\setminus N$, kde $N=\{(x,y);\ x\ge 0,\ y=0\}$. (To, že obrazem není celé $\mathbb{R}^2$, nevadí, neboť chybějící množina N má dvourozměrnou míru 0.) Jakobián je r.

Sférické souřadnice. Substituce $x=r\cos u\cos v$, $y=r\sin u\cos v$, $z=r\sin v$. Zobrazení $\varphi:\langle r,u,v\rangle\mapsto\langle x,y,z\rangle$ je difeomorfismus z $\Omega=(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)$ do $\mathbb{R}^3\setminus N$, kde N je polorovina $y=0$, $x\ge 0$, tj. opět množina míry nula. Jakobián je $r^2\cos v$.
Názorně: u...zeměpisná délka, v...zeměpisná šířka (póly leží na ose z.)