16. Variační počet.

Terminologická poznámka. Zobrazení $F : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá funkce. Zobrazení $\Phi : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$, kde X je nějaký obecnější (často nekonečně-dimenzionální prostor) se nazývá *funkcionál*.

Opakování. X se nazve normovaný prostor, jestliže X je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$), a každému $x \in X$ je přiřazena norma $\|x\|$ tak, že platí: (i) $\|x\| = 0$ právě když $x = 0$, (ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$, (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; pro každé x, $y \in X$, $a \in \mathbb{R}$. Definujeme okolí

$$
\begin{aligned}
U(x_0, \delta) &= \big\{x \in X;\ \|x - x_0\| < \delta\big\} \\
P(x_0, \delta) &= U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}
\end{aligned}
$$

Funkcionál $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$ je spojitý, pokud

$$\big(\forall x_0 \in \mathcal{M}\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\Big[x \in U(x_0, \delta) \cap \mathcal{M} \implies |\Phi(x) - \Phi(x_0)| < \varepsilon\Big]$$

Definice. Nechť $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to R$, kde X je normovaný prostor.

1. Nechť x_0, $h \in X$. Limita (pokud existuje)

   $$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)\right]$$

   se nazývá Gâteauxův diferenciál Φ v bodě x_0 ve směru h. Značí se $D\Phi(x_0; h)$.

   Ekvivalentně je $D\Phi(x_0; h) = \varphi'(0)$, kde $\varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována $\varphi(t) = \Phi(x_0 + th)$.

2. Nechť $x_0 \in X$. Existuje-li spojité lineární zobrazení $A : X \to R$, splňující

   $$\Phi(x_0 + h) = \Phi(x_0) + A(h) + o(\|h\|), \qquad h \to 0,$$

   podrobněji

   $$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\left[h \in P(0, \delta) \implies \left|\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - A(h)}{\|h\|}\right| < \varepsilon\right],$$

   nazývá se Fréchetův diferenciál Φ v bodě x_0. Značí se $\Phi'(x_0)$.

Poznámky.

- pro $X = \mathbb{R}^n$ je Gâteauxův diferenciál totéž co derivace ve směru; Fréchetův diferenciál totéž co totální diferenciál.
- platí: $\Phi'(x_0)$ existuje $\implies$ $D\Phi(x_0; h)$ existuje pro každé $h \in X$, a platí $D\Phi(x_0; h) = [\Phi'(x_0)](h)$.
- platí: $\Phi'(x_0)$ existuje $\implies$ Φ je spojitý v bodě x_0.
- <u>důležité:</u> k existenci $\Phi'(x_0)$ je nutné, aby množina $\mathcal{M}$ (=definiční obor Φ) obsahovala nějaké okolí x_0 – dosti silný předpoklad. Existence $D\Phi(x_0; h)$ předpokládá pouze, že $x_0 + th \in \mathcal{M}$ pro t dosti malé.

Definice. Nechť $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$. Bod $x_0 \in \mathcal{M}$ se nazve:

1. globální minimum, jestliže $(\forall x \in \mathcal{M})\Big[\Phi(x) \geq \Phi(x_0)\Big]$;

2. lokální minimum, jestliže $(\exists \delta > 0)(\forall x \in U(x_0, \delta) \cap \mathcal{M})\Big[\Phi(x) \geq \Phi(x_0)\Big]$;

3. ostré lokální minimum, jestliže $(\exists \delta > 0)(\forall x \in P(x_0, \delta) \cap \mathcal{M})\Big[\Phi(x) > \Phi(x_0)\Big]$.

Analogicky se definuje maximum. Souhrnný název pro minimum/maximum je ,,extrém".

Věta 16.1. Nechť $\Phi(x) : \mathcal{M} \subset X \to R$ má v $x_0 \in \mathcal{M}$ lokální extrém. Nechť $h \in X$ je takové, že $D\Phi(x_0; h)$ existuje. Potom $D\Phi(x_0; h) = 0$.
Definice. Nechť $k \geq 0$ celé, $a < b \in \mathbb{R}$. Definujeme

$$C^k([a,b]) = \left\{\tilde{y}|_{[a,b]} :\ \tilde{y} \in C^k(\mathbb{R})\right\} ;$$
$$C_0^1([a,b]) = \left\{y \in C^1([a,b]) :\ y(a) = y(b) = 0\right\} .$$

Základní úloha variačního počtu. Nalezení extrémů funkcionálu $\Phi(y) : \mathcal{M} \subset X \to \mathbb{R}$, kde $X = C^1([a,b])$,

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\ \mathcal{M} &= \left\{y \in C^1([a,b]) :\ y(a) = A,\ y(b) = B\right\} . \end{aligned} \qquad (U)$$

Prostor $C^1([a,b])$ je opatřený normou $\|y\| = \sup_{x\in[a,b]} \left\{|y(x)| + |y'(x)|\right\}$.
Klíčovou roli nadále hraje funkce $f = f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která funkcionál "vytváří". Budeme značit $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Věta 16.2. Je dána úloha (U). Nechť $y_0 \in \mathcal{M}$, $h \in C_0^1([a,b])$ jsou libovolná. Předpokládejme, že $f \in C^1$. Potom existuje $D\Phi(y_0; h)$ a platí

$$D\Phi(y_0; h) = \int_a^b f_y(x, y_0(x), y_0'(x))h(x) + f_z((x, y_0(x), y_0'(x))h'(x)\, dx\,.$$

Upřesňující poznámka. V předchozí větě stačí, aby $f = f(x,y,z) \in C^1(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina taková, že $(x, y_0(x), y_0'(x)) \in G$ pro každé $x \in [a,b]$.

Diracova funkce $\delta(x)$**.** Je určena vlastnostmi ① $\delta(x) = 0$ pro $\forall x \neq 0$ a ② $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)\, dx = 1$ pro $\forall \varepsilon > 0$. Interpretujeme-li pojmy ,,funkce" a ,,integrál" v obvyklém smyslu, pak Diracova funkce nemůže existovat!

Definice. Nosič (support) funkce f definujeme jako

$$\operatorname{supp} f := \overline{\left\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\right\}}.$$

Ekvivalentně: nosič je nejmenší uzavřená množina M taková, že $f = 0$ mimo M.

Lemma 16.1. Nechť $\varphi(x)$ je omezená funkce s omezeným nosičem, a nechť $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. Potom

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}} f(x_0 + y) \varphi_\varepsilon(y) \, dy = f(x_0),$$

kde $\varphi_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-1} \varphi(y/\varepsilon)$.

Poznámka. Je-li φ nula vně intervalu $[-K, K]$, stačí v tvrzení předchozí věty integrovat přes $[-\varepsilon K, \varepsilon K]$.

Důsledek. Nechť $v(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě x_0. Potom

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x_0+\varepsilon}^{x_0-\varepsilon} v(x) \, dx = v(x_0) \, .$$

Poznámka. Posloupnost funkcí φ_ε aproximuje Diracovu funkci δ – podobně jako posloupnost čísel, jdoucích do 0, aproximuje ,,nekonečně malé“ číslo: další klíčový objekt analýzy, který striktně vzato neexistuje.

Důležitá konstrukce. Shlazovací funkce (molifiér, bump function, seřezávací funkce) se definuje jako

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ C \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & |x| < 1 \end{cases}$$

Základní vlastnosti φ:

- $\varphi(x) \geq 0$ v $\mathbb{R}$
- $\varphi(x) = 0$ pro $|x| \geq 1$, $\varphi(x) > 0$ pro $|x| < 1$
- $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, dx = 1$ (docílíme vhodnou volbou konstanty $C > 0$)

Seřezávací funkce s nosičem v $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se dostane jako

$$\varphi_{a,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right) .$$

Lemma 16.2. [Slabá formulace diferenciální rovnice.]

1. Nechť $u \in C([a, b])$. Potom $u \equiv 0$ v $[a, b]$, právě když

$$\int_a^b u(x) h(x) \, dx = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a, b]) \, .$$

2. Nechť $w \in C^1([a,b])$, $v \in C([a,b])$. Potom $-w' + v \equiv 0$ v $[a,b]$, právě když

$$\int_a^b w(x)h'(x) + v(x)h(x)\,dx = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a,b])\,.$$

Věta 16.3. [Euler-Lagrange.] Je dána úloha (U). Nechť $y \in \mathcal{M}$ je lokální extrém. Předpokládejme navíc, že $y \in C^2$, $f \in C^2$. Potom y splňuje v $[a,b]$ rovnici

$$-\frac{d}{dx}\big(f_z(x, y(x), y'(x))\big) + f_y(x, y(x), y'(x)) = 0\,. \qquad (E.L.)$$

Definice. Předchozí rovnice se nazývá Euler-Lagrangeova rovnice funkcionálu Φ. Každé její řešení, náležící do $\mathcal{M}$ (tj. splňující okrajové podmínky $y(a) = A$, $y(b) = B$), nazýváme extremálou úlohy (U).

Příklad. $\Phi(y) = \int_0^\pi (y' + y)^2 + 2y \sin x\,dx$, $\mathcal{M} = \big\{y \in C^1([0,\pi]);\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1\big\}$. E.L. rovnice je $y'' - y = \sin x$, jediná extremála $y_0(x) = \frac{\sinh x}{\sinh \pi} - \frac{1}{2}\sin x$. Elementárně lze dokázat, že y_0 je globální minimum.

Věta 16.4. [Legendre.] Je dána úloha (U). Nechť $y \in \mathcal{M}$ je C^2, $f \in C^2$. Potom

1. je-li y lokální minimum, je $f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \geq 0$ pro $\forall x \in (a,b)$;
2. je-li y lokální maximum, je $f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \leq 0$ pro $\forall x \in (a,b)$.

Poznámka. Souvisí s tvrzením: má-li $\varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $t = 0$ lokální minimum, je $\varphi''(0) \geq 0$. V průběhu důkazu se odvodí druhý Gâteauxův diferenciál

$$D^2\Phi(y; h, h) = \int_a^b f_{yy}(x, y, y')h^2 + 2f_{yz}(x, y, y')hh' + f_{zz}(x, y, y')[h']^2\,dx\,.$$

Lemma 16.3. Nechť f nezávisí explicitně na x, tj. $f = f(y, z)$. Potom každé řešení E.L. rovnice řeší také rovnici

$$-y' f_z(y, y') + f(y, y') = K\,,$$

kde K je vhodná konstanta.

Definice. Nechť $y \in \mathcal{M}$ je extremála úlohy (U). Označme

$$\begin{aligned} P(x) &= f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \\ Q(x) &= f_{yy}(x, y(x), y'(x)) - [f_{yz}(x, y(x), y'(x))]' \end{aligned}$$

Rovnice

$$[P(x)u'(x)]' - Q(x)u(x) = 0 \qquad (J)$$

(pro neznámou funkci $u = u(x)$) se nazývá Jacobiho rovnice, příslušná dané extremále.

Bod $\tilde{x} \in (a, b]$ se nazve konjugovaný bod rovnice (J), pokud existuje netriviální (tj. ne identicky nulové) řešení $u(x)$ takové, že $u(a) = u(\tilde{x}) = 0$.

Věta 16.5.[1] [Jacobiho.] Nechť $y \in C^2([a, b])$ je extremálou úlohy (U), nechť $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$. Nechť (J) je příslušná Jacobiho rovnice, přičemž $P(x) > 0$ v $[a, b]$.

1. Je-li y lokální minimum, pak rovnice (J) nemá v intervalu (a, b) konjugovaný bod.
2. Jestliže rovnice (J) nemá v intervalu $(a, b]$ konjugovaný bod, je y ostré lokální minimum.

Zrcadlová verze: $P(x) < 0$ v $[a, b]$, maximum místo minimum.

Variační úloha s vazbou. Hledáme extrémy funkcionálu Φ na množině $\mathcal{M}$, kde

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \\ \mathcal{M} &= \big\{y \in C_0^1([a, b]) : \Psi(y) = c\big\} \qquad (V) \\ \Psi(y) &= \int\limits_a^b g(x, y(x), y'(x))\, dx\,. \end{aligned}$$

Věta 16.6.[2] [Lagrangeův multiplikátor.] Nechť $y \in \mathcal{M}$ je lokální extrém úlohy (V). Předpokládejme, že $y \in C^2$, f, $g \in C^2$, navíc $D\Psi(y; h) \neq 0$ alespoň pro jedno $h \in C_0^1([a, b])$. Potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$D\Phi(y; h) - \lambda D\Psi(y; h) = 0 \qquad \forall h \in C_0^1([a, b]) \qquad (L)$$

Použití na úlohu (V). (L) tvrdí nulovost Gâteauxova diferenciálu pro funkcionál

$$\chi(y) = \int_a^b f(x, y, y') - \lambda g(x, y, y')\, dx\,,$$

tedy extrémy (V) řeší odpovídající E.L. rovnici

$$-\frac{d}{dx}\big(f_z(x, y, y') - \lambda g_z(x, y, y')\big) + f_y(x, y, y') - \lambda g_y(x, y, y') = 0$$

Poznámka. Srovnej s větou v $\mathbb{R}^n$: nechť x je lokální extrém $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na množině $M = \{x \in \mathbb{R}^n;\ G(x) = c\}$. Nechť vektor $\nabla G(x)$ je nenulový. Potom existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla\big(F(x) - \lambda G(x)\big) = \mathbf{0}$.

[1] Bez důkazu.
[2] Bez důkazu.