(d3) $\int_0^\infty \frac{x^a}{\sqrt{1+x}}\,dx \;\; \dots = \int_0^\delta + \int_\delta^K + \int_K^\infty = I_1 + I_2 + I_3$

I_2.. konv. ($f(t)$ spojité; $[\delta, K]$.. omezený)

I_1: $\left.\begin{array}{l} \sqrt{1+x} \sim 1 \;;\; x \to 0+ \\ f(x) \sim x^a \end{array}\right\}$ konv. $\Leftrightarrow \int_0^\delta x^a$ konv

$a > -1$

I_3: $f(x) \sim x^{a-\frac{1}{2}}$; ověření: $\frac{f(x)}{x^{a-\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$

pro $x \to +\infty$.

$= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x}+1}} \to 1; \; x \to +\infty$

konv. $\Leftrightarrow a - \frac{1}{2} < -1$

$a < -\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Závěr: „d3" konv.} \Leftrightarrow a \in (-1, -\tfrac{1}{2}).}$

---

(1) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt{x}+2}\,dx$; $f(x) \sim x^{-\frac{1}{6}}$; $x \to +\infty$.

ověření: $\frac{f(x)}{x^{-\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}+3}{x^{\frac{1}{2}}+2} \cdot x^{\frac{1}{6}} = \frac{1+3x^{-\frac{1}{3}}}{1+2x^{-\frac{1}{2}}}$

$\to 1; \; x \to +\infty$

$\int_K^\infty x^{-\frac{1}{6}}$ diverg.; $\Rightarrow \int_K^\infty f(x)$ pro $K>0$ velké div.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{„1" diverguje.}}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x^{9/8}\ln x}\,dx$; $|f(x)| = \dfrac{-\sin \pi x}{x^{9/8}\ln x}$; spojité v $(0,1)$.

stačí vyšetřit: $\displaystyle\int_0^\delta , \int_{1-\delta}^1$; $\delta > 0$ malé.

u $0+$: $|f(x)| \leq \dfrac{\sin \pi x}{x^{9/8}(-\ln \delta)} = c \cdot \dfrac{\sin \pi x}{x^{9/8}} \sim x^{-\frac{1}{8}}$

konverguje.

u $1-$: $\left.\begin{array}{l} \sin \pi x \sim x-1 \\ \ln x \sim x-1 \\ x^{9/8} \sim 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \sim 1$;

$\displaystyle\int_{1-\delta}^{\delta} 1\,dx$ konverguje.

$\boxed{\text{Celkem: Konverguje}}$

---

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^{\frac{101}{100}}}\,dx$; opět stačí $\displaystyle\int_0^\delta , \int_K^\infty =: I_1, I_2$.

I_1: $\ln(x+1) \sim x$ ... konverg.

$f(x) \sim x^{-\frac{1}{100}}$

I_2: $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^{\varepsilon}} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{101}{100}-\varepsilon}}$; $0 < \varepsilon < \frac{1}{100}$.

$\to 0$

a tedy ≤ 1

pro $x > K$ velké

$\displaystyle\int_K^\infty \frac{1}{x^a}$; $a = \frac{101}{100} - \varepsilon > 1$

konverguje!

$\boxed{\text{Celkem: konverg.}}$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_0^{K} + \int_K^{\infty} = I_1 + I_2.$

I_1 .. konverguje ($|f(x)| \leq 1$; omezený interval).

I_2 : $f(x) \sim x^{-3/2}$; $x \to +\infty$: ověření:

$$\frac{f(x)}{x^{-3/2}} = \left(\frac{\sin\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)}{x^{-\frac{1}{2}}}\right)^3 \to 1$$

$\displaystyle\int_K^{\infty} x^{-3/2}$ konv.

neboť: $x^{-\frac{1}{2}} \to 0$; leč $\neq 0$ na $P(\infty)$

$\frac{\sin y}{y} \to 1$; $y \to 0$.

$\boxed{\text{Závěr: „5" konverg.}}$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ ... opět stačí: $\displaystyle\int_0^{\delta}$, $\displaystyle\int_{\pi-\delta}^{\pi}$.

u $\pi-$: $f(x) \sim (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \sim (\pi - x)^{-\frac{1}{2}}$, $x \to \pi-$.

ověření: $$\frac{f(x)}{(\pi-x)^{-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\pi - x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi - x}{\sin(\pi - x)}\right)^{\frac{1}{2}} \to 1. \quad x \to \pi-$$

$(\sin y = -\sin(y - \pi) = \sin(\pi - y))$.

Tedy : $\displaystyle\int_{\pi-\delta}^{\pi}$ konv; neboť $\displaystyle\int_{\pi-\delta}^{\pi} (\pi - x)^{-\frac{1}{2}}$ konv.; analogicky k $\displaystyle\int_0^{\delta} x^{-\frac{1}{2}} dx$.

Situace u $0+$ je stejná.

$\boxed{\text{Závěr: „6" konverg.}}$

(7) $\int_0^\infty x e^{-x} \sin x \, dx$; $|f(x)| \le x e^{-x}$.

stačí: $\int_K^\infty x e^{-x}$ konv.: $x e^{-x} = \underbrace{x \cdot e^{-\frac{x}{2}}}_{\le 1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$; $\int_K^\infty e^{-\frac{x}{2}} = 2e^{-\frac{K}{2}} < +\infty$

≤ 1 pro $x > K$ velké

$\boxed{\text{Závěr: konverguje}}$

Pozn.: Integrál lze spočítat! (Hint: $e^{\alpha x + i\beta x} = \dots$)

---

(10) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x - \cos x}$; $f(x) \sim x^{-1}$; $x \to 0+$

ověření: $\frac{f(x)}{x^{-1}} = \frac{x}{e^x - \cos x} \to 1$; $x \to 0+$ (l'Hospital).

$\int_0^\delta x^{-1}$ diverg. ..

$\boxed{\text{Závěr: „10" diverguje}}$

---

(11) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^a}$; stačí vyšetřit $\int_0^\delta , \int_K^\infty = I_1, I_2$.

I_1: $f(x) \sim x^{1-a}$; $x \to 0+$
neboť $\operatorname{arctg} x \sim x$.
$\Big\}$ I_1 konv. $\Leftrightarrow$ $1-a > -1$
$a < 2$

I_2: $\operatorname{arctg} x \sim 1$; $x \to +\infty$
ověření: $\frac{\operatorname{arctg} x}{1} \to \frac{\pi}{2}$; $x \to +\infty$.
$\Big\}$ I_2 konv. $\Leftrightarrow$ $a > 1$

$\boxed{\text{Závěr: „11" konverg.} \Leftrightarrow a \in (1,2)}$