4. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/4} \left[4y^2 + (y')^2 + 8y\right] dx,\ y(0) = -1,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

5. $J(y) = \int\limits_0^{1} \left[(y')^2 + y^2 + 2e^{2x}y\right] dx,\ y(0) = \frac{1}{3},\ y(1) = \frac{1}{3}e^2.$

6. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \left[(y')^2 + 4y^2 + 2y\cos x\right] dx,\ y(0) = \frac{4}{5},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}.$

7. $J(y) = \int\limits_{-2}^{-1} \left[x^2(y')^2 + 12y^2\right] dx,\ y(-2) = \frac{1}{16},\ y(-1) = 1.$

8. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[2y + yy' + x^2(y')^2\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 1 + \ln 2.$

9. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[xy' + y\right]^2 dx,\ y(1) = 1,\ y(2) = \frac{1}{2}.$

10. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left[(y' + y)^2 + 2y\sin x\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1.$

11. $J(y) = \int\limits_0^{1} \left[x^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2(y')^2\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 2.$

12. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y\ln x}{x}\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 1 - \ln 2.$

13. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[\frac{3y^2}{x^3} + \frac{(y')^2}{x} + 8y\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 8\ln 2.$

14. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + 4y\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 2\ln 2.$

15. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[(y')^2 + \frac{6y^2}{x^2} - 32y\ln x\right] dx,\ y(1) = 3,\ y(2) = 4(4\ln 2 + 3).$

16. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[x^2(y')^2 + 2y^2 + 32x^2y\ln x\right] dx,\ y(1) = -5,\ y(2) = 4(4\ln 2 -$

17. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[x(y')^2 + \frac{4y^2}{x} - 18y\ln x\right] dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 2(3\ln 2 + 2).$

18. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[x(y')^2 + 2yy'\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = \ln 2.$

19. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[x(y')^2 + yy' + xy\right] dx,\ y(1) = \frac{1}{8},\ y(2) = \frac{1}{2} - \ln 2.$

20. $J(y) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left[y - \frac{1}{2}(y')^2\right] \sin x\,dx,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ln\sqrt{2},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

21. $J(y) = \int\limits_1^{e} \left[\frac{1}{2}x(y')^2 + \frac{2yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right] dx,\ y(1) = 1,\ y(e) = 2.$

22. $J(y) = \int\limits_0^{1} \left[(1 + x)e^x y + \frac{1}{2}e^x(y')^2\right] dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = \frac{3}{2}.$

23. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[\frac{3y^2}{x^3} + x^2 + \frac{(y')^2}{x}\right] dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 8\frac{1}{2}.$

24. $J(y) = \int\limits_1^{2} \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x}\right] dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 2\frac{1}{2}.$

25. $J(y) = \int\limits_1^{4} \left[\sqrt{x}(y')^2 + \frac{y^2}{2x\sqrt{x}}\right] dx,\ y(1) = 2,\ y(4) = 4\frac{1}{2}.$

26. $J(y) = \int\limits_1^4 \left[\frac{(y')^2}{\sqrt{x}} + \frac{y^2}{x^2\sqrt{x}}\right] dx,\ y(1) = 2,\ y(4) = 16\frac{1}{2}.$

27. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[\frac{1}{2}x(y')^2 + xyy' + \frac{1}{2}y^2\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 1.$

28. $J(y) = \int\limits_{-2}^{-1} [2yy' - x^2(y')^2]\, dx,\ y(-2) = \frac{3}{2},\ y(-1) = 2.$

29. $J(y) = \int\limits_0^1 [xyy' - 2(y')^2]\, dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = \operatorname{ch}\frac{1}{2}.$

30. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 + 2yy' + 4y^2]\, dx,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sh}\pi.$

31. $J(y) = \int\limits_{1/4}^{1/2} \left[\frac{(y')^2}{(x-1)^2} - \frac{2y^2}{x(x-1)^3}\right] dx,\ y\left(\frac{1}{4}\right) = 1,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$

32. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[(y')^2 + \frac{2y^2}{x^2} + \frac{8y}{x^4}\right] dx,\ y(1) = 1,\ y(2) = \frac{1}{4}.$

33. $J(y) = \int\limits_0^{1/2} \left[\frac{(y')^2}{x^2 - 1} - \frac{2y^2}{(x^2-1)^2}\right] dx,\ y(0) = 1,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$

34. $J(y) = \int\limits_{-2}^{-1} \left[x^3(y')^2 + 3xy^2 - \frac{6y}{x}\right] dx,\ y(-2) = \frac{1}{4},\ y(-1) = 1.$

35. $J(y) = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} [(y')^2 - 6y\sin x]\cos^2 x\, dx,\ y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$

36. $J(y) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} [(x^2-1)(y')^2 - 4x^3y' - 4y]\, dx,\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

37. $J(y) = \int\limits_0^1 [e^x(y' - x)^2 + 2y]\, dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = \frac{1}{2}.$

38. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[(y')^2\sqrt{4 - x^2} - 2y\right] dx,\ y(0) = 2,\ y(1) = \sqrt{3}.$

39. $J(y) = \int\limits_{-2}^{-1} [x^3(y')^2 + 3xy^2]\, dx,\ y(-2) = \frac{15}{8},\ y(-1) = 0.$

40. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[(y')^2 + \frac{2y^2}{x^2}\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = \frac{7}{2}.$

41. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/4} \left[\frac{(y')^2}{\cos x} + \frac{y}{\cos^2 x}\right] dx,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$

42. $J(y) = \int\limits_1^2 [(xy' + y)^2 + (1 + x^2)y']\, dx,\ y(1) = -\frac{1}{2},\ y(2) = 1.$

43. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/4} [(y')^2\cos^2 x + x^2yy' + xy^2 - 2y'\cos^3 x]\, dx,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

44. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[\frac{(y')^2}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}yy' + \frac{y^2}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}y'\right] dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 5.$

45. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[(1 + x^2)(y')^2 - 4xy' + yy'\sin^2 x + \frac{1}{2}y^2\sin 2x\right] dx,\ y(0) = y(1) = \ln 2.$

46. $J(y)=\int\limits_0^1 \left[(y')^2+y^2-2xy\right] dx,\ y(0)=1,\ y(1)=1+e.$

47. $J(y)=\int\limits_0^2 \left[4(y')^2+y^2-6e^x y'\right] dx,\ y(0)=2,\ y(2)=e^{-1}+e^2.$

48. $J(y)=\int\limits_0^2 \left[4(y')^2+y^2+4xy\right] dx,\ y(0)=1,\ y(2)=e-4.$

49. $J(y)=\int\limits_0^\pi \left[(y')^2+8y'\sin^2 x+4y\right] dx,\ y(0)=0,\ y(\pi)=\pi^2.$

50. $J(y)=\int\limits_0^1 \left[(y')^2+y^2+x^2y'\right] dx,\ y(0)=1,\ y(1)=1+e^{-1}.$

51. $J(y)=\int\limits_0^\pi \left[(y')^2+y^2-4y\sin x\right] dx,\ y(0)=1,\ y(\pi)=e^\pi.$

52. $J(y)=\int\limits_0^\pi \left[(y')^2+y^2+10y'(x+\sin^2 x)\right] dx,\ y(0)=6,\ y(\pi)=5+e^{-\pi}.$

53. $J(y)=\int\limits_0^1 \left[4xyy'-(y')^2-4y^2+(12x^2-4)y\right] dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1.$

54. $J(y)=\int\limits_1^2 \left[(y')^2+2yy'\sin x+\left(\cos x+\frac{20}{x^2}y^2+20x^4y\right)\right] dx,\ y(1)=-1,$ $y(2)=0.$

55. $J(y)=\int\limits_1^4 \left[\frac{2yy'}{x}-\frac{3y^2}{x^2}-(y')^2-\frac{y}{x}\right] dx,\ y(1)=y(4)=4.$

56. $J(y)=\int\limits_1^2 \left[(y')^2+\frac{4y}{x}y'+\frac{4y^2}{x^2}-8y\right] dx,\ y(1)=2,\ y(2)=\frac{17}{4}.$

57. $J(y)=\int\limits_1^2 \left[24x^3y-yy'-x^2(y')^2\right] dx,\ y(1)=1,\ y(2)=-7.$

58. $J(y)=\int\limits_1^2 \left[x^2(y')^2+yy'+12xy\right] dx,\ y(1)=1,\ y(2)=5.$

59. $J(y)=\int\limits_1^4 \left[\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)y^2+2yy'\ln x-4(y')^2-10y\right] dx,\ y(1)=-1,$ $y(4)=0.$

60. $J(y)=\int\limits_0^2 \left[(y')^2+xyy'+\frac{3}{4}y^2+\left(\frac{x^2}{2}-6\right)y\right] dx,\ y(0)=5,\ y(2)=e.$

61. $J(y)=\int\limits_1^2 \left[12xy-\frac{12}{x}yy'-3(y')^2\right] dx,\ y(1)=\frac{1}{2},\ y(2)=0.$

62. $J(y)=\int\limits_0^1 \left[(y')^2-2yy'\cos x+(4+\sin x)y^2+4(2x^2-3)y\right] dx,\ y(0)=2,$ $y(1)=e^2.$

63. $J(y)=\int\limits_0^2 e^{3x}\left[(y')^2+4y^2\right] dx,\ y(0)=e^{10}-1,\ y(2)=0.$

64. $J(y)=\int\limits_{1/2}^1 \left[\left(\frac{y'}{x}\right)^2+\left(\frac{2y}{x^2}\right)^2\right] dx,\ y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{31}{16},\ y(1)=0.$

65. $J(y)=\int\limits_{-1}^1 e^x\left[(y')^2+6y^2\right] dx,\ y(-1)=0,\ y(1)=e^7-e^{-3}.$

66. $J(y)=\int\limits_1^2 \left[(y')^2+6\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] dx,\ y(1)=0,\ y(2)=\frac{31}{4}.$

67. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}(y')^2 + yy'\operatorname{tg} x + \left(2 + \frac{1}{2\cos^2 x}\right) y^2 + 3y\operatorname{ch} x\right] dx,\ y(0) = -1,\ y(1) = 2\operatorname{sh} 2 - \operatorname{ch} 1.$

68. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/4} \left[yy'\operatorname{arctg} x - (y')^2 + \frac{y^2}{2(1+x^2)} - 9y^2 + 16y\operatorname{sh} x\right] dx,\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{sh}^3\frac{\pi}{4} + \operatorname{sh}\frac{\pi}{4}.$

69. $J(y) = \int\limits_{1/4}^1 [6xy' - \sqrt{x}y^2 - x^2\sqrt{x}(y')^2]\, dx,\ y\left(\frac{1}{4}\right) = -1,\ y(1) = 1.$

70. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[\frac{4}{x}(y')^2 + \frac{5}{x^2}yy' - \frac{8\sqrt{x}}{x^3}y\right] dx,\ y(1) = -\frac{1}{2},\ y(2) = 0.$

71. $J(y) = \int\limits_1^3 \left[2\sqrt{x}(y')^2 + \frac{y^2}{x\sqrt{x}} - \frac{8y'}{x\sqrt{x}}\right] dx,\ y(1) = -2,\ y(3) = 2.$

72. $J(y) = \int\limits_1^4 [15\sqrt{x}y + 3x^2yy' - x^3(y')^2]\, dx,\ y(1) = 1,\ y(4) = -3.$

73. $J(y) = 1 - \int\limits_1^4 \left[x^{\frac{5}{2}}(y')^2 + x^{\frac{1}{2}}y^2\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(4) = -\frac{31}{16}.$

74. $J(y) = \int\limits_{1/3}^1 [4x^3(y')^2 - 5x^2yy' - 3y]\, dx,\ y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2},\ y(1) = \frac{1}{6}.$

75. $J(y) = \int\limits_{1/2}^2 [4xyy' - x^2(y')^2 + 4x^2y]\, dx,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = y(2) = \frac{1}{2}.$

76. $J(y) = \int\limits_{1/2}^1 [5x^4y - yy' + x^5(y')^2]\, dx,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},\ y(1) = 1.$

77. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[3x^2yy' - x^3(y')^2 + \frac{6y}{x}\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = \frac{1}{8}.$

78. $J(y) = \int\limits_1^2 [2xy^2 + 2x^2yy' + x^2(y')^2 + 12x^2y]\, dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 5.$

79. $J(y) = \int\limits_1^3 [8xy - x^2(y')^2 - x^2yy' - (x+6)y^2]\, dx,\ y(1) = 0,\ y(3) = -6.$

80. $J(y) = \int\limits_1^3 [x^2(y')^2 + x^2yy' + xy^2 + 4xy]\, dx,\ y(1) = y(3) = 4.$

81. $J(y) = \int\limits_2^4 [x^2yy' + 8x^2y - x^2(y')^2 + (x-2)y^2]\, dx,\ y(2) = 0,\ y(4) = -8.$

82. $J(y) = \int\limits_1^e [x^2(y')^2 + 6y^2 + 100yx^2\ln x]\, dx,\ y(1) = 0,\ y(e) = 3e^2.$

83. $J(y) = \int\limits_1^e [x^4(y')^2 + 18x^2y^2 + 90x^5y + 16x^5y']\, dx,\ y(1) = 0,\ y(e) = 5e^2.$

84. $J(y) = \int\limits_1^e [x^3(y')^2 + 8xy^2 + 72yx^3\ln x]\, dx,\ y(1) = 1,\ y(e) = 3e^2.$

85. $J(y) = \int\limits_1^e [3x^5(y')^2 + 15x^3y^2 + 36x^4y - 14x^6y']\, dx,\ y(1) = 1,\ y(e) = 2e^2.$

86. $J(y) = \int\limits_1^2 [3x^4(y')^2 - 34x^3yy' + 3x^2y^2 - 84x^3y]\, dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 10.$

87. $J(y) = \int\limits_1^2 [x^2(y')^2 - 10xyy' - 3y^2 - 4y]\, dx,\ y(1) = 4,\ y(2) = 7.$

88. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^3(y')^2 - 11x^2yy' - 3xy^2 - 10x^2y\right] dx,\ y(1) = 3,\ y(2) = 10.$

89. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^2(y')^2 - 14xyy' - y^2 - 8xy\right] dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 6.$

90. $J(y) = \int\limits_1^4 \left[(y')^2 + \frac{3}{4x^2}y^2\right] dx,\ y(1) = 1,\ y(4) = 8.$

Найти значения вещественного параметра a, при которых на допустимой экстремали достигается минимум (91—93):

91. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[y - 2y' + a(y')^2\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

92. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[(y')^2 + ax(y')^2\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = \ln|1 + a|.$

93. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[x + x^2 + y^2 + a(y')^2\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

Найти допустимые экстремали (94—101):

94. $J(y) = \int\limits_0^1 y^n(y')^2 dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

95. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[y^2(y')^2 + 9y^2\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = -5.$

96. $J(y) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left[(y')^2 \sin x + 2y\cos x\right] dx,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

97. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - xy' - y\right] dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = e^{-1}.$

98. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[\ln y' - 3yy' - xy'\right] dx,\ y(1) = -\ln 2,\ y(2) = 0.$

99. $J(y) = \int\limits_0^{1/2} \left[y + xy' - \frac{1}{y}(y')^3\right] dx,\ y(0) = \frac{2}{3},\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}.$

100. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[y'e^y + x^4(y')^3\right] dx,\ y(1) = 3,\ y(2) = 2.$

101. $J(y) = \int\limits_1^2 \left[y'\sin y + \frac{1}{x^3}(y')^4\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 3.$

В задачах (102—105) показать, что допустимая экстремаль не дает экстремум функционала:

102. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left[(y')^2 - \frac{16}{9}y^2 + 2y\sin x\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

103. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left[(y')^2 - \frac{9}{4}y^2 + 18y\right] dx,\ y(0) = 4,\ y(\pi) = 0.$

104. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left[(y')^2 - \frac{25}{9}y^2 + 68e^x y\right] dx,\ y(0) = 9,\ y(\pi) = 9e^{\pi}.$

105. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} \left[(y')^2 - \frac{25}{16}y^2 + 50xy\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 16\pi.$

Показать, что простейшие вариационные задачи (106—107) не имеют смысла:

106. $J(y) = \int\limits_0^1 \left[x^2y' + 2xy\right] dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

107. $J(y) = \int\limits_1^2 \frac{1}{x^2}\left[xy' - y\right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 2.$

Ответы к задачам § 19

Примечание. В ответах $\hat{y}(x)$ обозначает допустимую экстремаль, абсолютный минимум обозначается абс. min, а абсолютный максимум обозначается абс. max.

1. $\hat{y}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} e}$, абс. min.

2. $\hat{y}(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$, абс. min.

3. $\hat{y}(x) = x + \dfrac{\ln x}{\ln 3}$, абс. min.

4. $\hat{y}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}} - 1$, абс. min.

5. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{3}e^{2x}$, абс. min.

6. $\hat{y}(x) = e^{2x} - \dfrac{1}{5}\cos x$, абс. min.

7. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x^4}$, абс. min.

8. $\hat{y}(x) = \ln x - \dfrac{2}{x} + 2$, абс. min.

9. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x}$, абс. min.

10. $\hat{y}(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}\pi} - \dfrac{1}{2}\sin x$, абс. min.

11. $\hat{y}(x) = \dfrac{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}}$, абс. min.

12. $\hat{y}(x) = \dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right) - \ln x$, абс. min.

13. $\hat{y}(x) = x^3 \ln x$, абс. min.

14. $\hat{y}(x) = x\ln x$, абс. min.

15. $\hat{y}(x) = x^2(4\ln x + 3)$, абс. min.

16. $\hat{y}(x) = x^2(4\ln x - 5)$, абс. min.

17. $\hat{y}(x) = x^2(3\ln x + 2)$, абс. min.

18. $\hat{y}(x) = \ln x$, абс. min.

19. $\hat{y}(x) = \dfrac{x^2}{8} - \ln x$, абс. min.

20. $\hat{y}(x) = \ln\sin x$, абс. max.

21. $\hat{y}(x) = \ln x + 1$, абс. min.

22. $\hat{y}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2}$, абс. min.

23. $\hat{y}(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$, абс. min.

24. $\hat{y}(x) = x + \dfrac{1}{x}$, абс. min.

25. $\hat{y}(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, абс. min.

26. $\hat{y}(x) = x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, абс. min.

27. $\hat{y}(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$, абс. min.

28. $\hat{y}(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, абс. max.

29. $\hat{y}(x) = \operatorname{ch}\dfrac{x}{2}$, абс. max.

30. $\hat{y}(x) = \operatorname{sh} 2x$, абс. min.

31. $\hat{y}(x) = 4x$, абс. min.

32. $\hat{y}(x) = \dfrac{3}{14}\left(x^2 - \dfrac{15}{x}\right) + \dfrac{4}{x^2}$, абс. min.

33. $\hat{y}(x) = x^2 + \dfrac{3x}{2} + 1$, абс. max.

34. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x^2}$, абс. max.

35. $\hat{y}(x) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x + \sin x + 1$, абс. min.

36. $\hat{y}(x) = x^2$, абс. max.

37. $\hat{y}(x) = (1-x)e^{-x} + \dfrac{1}{2}x^2$, абс.

38. $\hat{y}(x) = \sqrt{4 - x^2}$, абс. min.

39. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x^3} - x$, абс. max.

40. $\hat{y}(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$, абс. min.

41. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x + 1)$, абс. min.

42. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{2}{x}$, абс. min.

43. $\hat{y}(x) = \sin x$, абс. min.

44. $\hat{y}(x) = x^2 + 1$, абс. min.

45. $\hat{y}(x) = \ln(1 + x^2)$, абс. min.

46. $\hat{y}(x) = x + e^x$, абс. min.

47. $\hat{y}(x) = e^{-\frac{x}{2}} + e^x$, абс. min.

48. $\hat{y}(x) = e^{\frac{x}{2}} - 2x$, абс. min.

49. $\hat{y}(x) = \sin 2x + 2x^2 - \pi x$, абс.

50. $\hat{y}(x) = x + e^{-x}$, абс. min.

51. $\hat{y}(x) = e^x + \sin x$, абс. min.

52. $\hat{y}(x) = e^{-x} + 5 + \sin 2x$, абс. min.

53. $\hat{y}(x) = x^2$, абс. max.

54. $\hat{y}(x) = x^6 - 2x^5$, абс. min.

55. $\hat{y}(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{4}$, абс. max.

56. $\hat{y}(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, абс. min.

57. $\hat{y}(x) = -x^3 + \dfrac{2}{x}$, абс. max.

58. $\hat{y}(x) = 3x - \dfrac{2}{x}$, абс. min.

59. $\hat{y}(x) = x^2 - 2x^{\frac{3}{2}}$, абс. max.

60. $\hat{y}(x) = e^{\frac{x}{2}} + 4 - x^2$, абс. min.

61. $\hat{y}(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}x^3$, абс. max.

62. $\hat{y}(x) = e^{2x} - x^2 + 1$, абс. min.

63. $\hat{y}(x) = e^{10-4x} - e^x$, абс. min.

64. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x} - x^4$, абс. min.

65. $\hat{y}(x) = e^{2x+5} - e^{-3x}$, абс. min.

66. $\hat{y}(x) = x^3 - \dfrac{1}{x^2}$, абс. min.

67. $\hat{y}(x) = 2\,\mathrm{sh}\,2x - \mathrm{ch}\,x$, абс. min.

68. $\hat{y}(x) = 2\,\mathrm{sh}\,3x + \mathrm{sh}\,x$, абс. max.

69. $\hat{y}(x) = 4\sqrt{x} - 3$, абс. max.

70. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$, абс. min.

71. $\hat{y}(x) = x - \dfrac{3}{x}$, абс. min.

72. $\hat{y}(x) = -x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, абс. max.

73. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x^2} - \sqrt{x}$, абс. max.

74. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{6x}$, абс. min.

75. $\hat{y}(x) = \dfrac{5x}{4} - \dfrac{x^2}{2}$, абс. max.

76. $\hat{y}(x) = \dfrac{x+1}{2}$, абс. min.

77. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$, абс. max.

78. $\hat{y}(x) = x^2 + 1$, абс. min.

79. $\hat{y}(x) = x - x^2$, абс. max.

80. $\hat{y}(x) = x + \dfrac{3}{x}$, абс. min.

81. $\hat{y}(x) = 2x - x^2$, абс. max.

82. $\hat{y}(x) = (5\ln x - 2)x^2 \ln x$, абс. min.

83. $\hat{y}(x) = 5x^2(1 - x + x\ln x)$, абс. min.

84. $\hat{y}(x) = x^2(1 + 3\ln^2 x - \ln x)$, абс. min.

85. $\hat{y}(x) = x(2x - 1 + \ln x)$, абс. min.

86. $\hat{y}(x) = x^3 + x$, абс. min.

87. $\hat{y}(x) = 3x + 1$, абс. min.

88. $\hat{y}(x) = 2x^2 + x$, абс. min.

89. $\hat{y}(x) = x^2 + x$, абс. min.

90. $\hat{y}(x) = x\sqrt{x}$, абс. min.

91. $\hat{y}(x) = x + \dfrac{x^2 - x}{4a}$, $a > 0$.

92. $\hat{y}(x) = \ln|1 + ax|$, $a \geqslant 0$.

93. $\hat{y}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,\dfrac{x}{\sqrt{a}}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{1}{\sqrt{a}}}$, $a \geqslant 0$.

94. $\hat{y}(x) = \dfrac{2}{n}\ln\left[1 + \left(e^{\frac{n}{2}} - 1\right)x\right]$.

95. $\hat{y}(x) = -\sqrt{9x^2 + 16x}$.

96. $\hat{y}(x) = x - \dfrac{\pi}{4}$.

97. $\hat{y}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (e^2 - 1)x}}$.

98. $\hat{y}(x) = \ln\dfrac{x}{2}$.

99. $\hat{y}(x) = \dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$.

100. $\hat{y}(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.

101. $\hat{y}(x) = x^2 - 1$.

§ 20. Обобщения простейшей вариационной задачи

1. Задача со свободным концом и задача без ограничений. Рассматривается

$$J(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx,$$

где функция $F(x, y, p)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в предыдущем параграфе. В отличие от предыдущего § 1 функция $y(x)$ должна удовлетворять лишь одному граничному условию $y(a) = A$.

Задачей со свободным концом ($x = b$) называется задача нахождения слабого экстремума $J(y)$ в классе непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, удовлетворяющих условию $y(a) = A$.

Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$ является решением задачи со свободным концом, то необходимо она удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и граничному условию вида

$$\left.\frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0.$$

Решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условию $y(a) = A$ и указанному условию при $x = b$, называется допустимой экстремалью задачи со свободным концом.

Задачей без ограничений называется задача нахождения слабого экстремума $J(y)$ в классе непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, не удовлетворяющих каким-либо граничным условиям при $x = a$ и $x = b$. Дважды непрерывно дифференцируемое решение $y(x)$ задачи без ограничений необходимо удовлетворяет уравнению Эйлера и граничным условиям вида

$$\left.\frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0.$$